Dragan Vugdelija
Otilija Sedlak

FINANSIJSKA I AKTUARSKA MATEMATIKA
- osnovni koncept za nastavu

Subotica
2008.

I DEO
FINANSIJSKA MATEMATIKA

SADRŽAJ I DELA

1. PROCENTNI I PROMILNI RAČUN

Srazmerni račun pomoću koga direktan odnos dve veličine (tekuće i bazne, dela i celine) izražavamo tako što jednu od veličina (baznu, odnosno celinu) uzimamo kao 100 odnosno 1.000 jedinica nazivamo procentni odnosno promilni račun.

Pođimo do sledećih dogovora:

$1\% = 1/100 = 0{,}01;$
$6\% = 6 \cdot 1/100 = 6/100 = 0{,}06;$
$1‰ = 1/1.000 = 0{,}001;$
$6‰ = 6 \cdot 1/1.000 = 6/1.000 = 0{,}006.$

Prema ovim dogovorima odnos broja 180 i 9.000 možemo prikazati ovako:

$$180 : 9.000 = \begin{cases} 2 : 100 = 0{,}02 : 1 = \quad 2\% : 100\% \\ 20 : 1.000 = 0{,}002 : 1 = 20 \quad 20‰ : 1.000‰ \end{cases}$$

Uopštimo ovaj primer i napišimo sledeću proporciju:

$$P : G = p : 1 \sim G : P = 1 : p \sim P = pG \qquad \textbf{(1)}$$

- G je oznaka za baznu veličinu, celinu ili tzv. čistu glavnicu;
- P je oznaka za tekuću veličinu, deo ili tzv. procentni (promilni) prinos;
- p je oznaka za tzv. procentnu (promilnu) stopu, i predstavlja tekuću veličinu na 1 jedinicu bazne veličine (glavnice), p se po želji i potrebi može prikazati u obliku s/100 ili s/1.000, pa tada s predstavlja prinos (tekuću veličinu) na 100 odnosno 1000 jedinica glavnice (bazne veličine).

Iz ove činjenice i dolazi naziv "procentni" odnosno "promilni" račun.

Proporcija (1) služi za tzv. procentni (promilni), račun od sto, (hiljadu) jer pretpostavlja rad sa tzv. čistom glavnicom. Međutim, u praksi se javljaju i slučajevi kada je data ili se pretpostavlja glavnica zajedno sa prinosom ili glavnica po odbitku prinosa. Za takve slučajeve jednostavno formiramo izvedene proporcije (polazeći od (1)) poznate pod nazivom proporcije za procentni (promilni) račun više i niže sto (hiljadu).

$$(G \pm P) : (1 \pm p) = \begin{cases} G : 1 \\ P : p \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

Iz (2) se po potrebi mogu dobiti:

$$P = \frac{p(G \pm P)}{1 \pm p} \qquad \textbf{(3)}$$

$$G = \frac{G \pm P}{1 \pm p} \qquad \textbf{(4)}$$

2. INTERESNI (KAMATNI) RAČUN

2.1. Pojam interesa i kapitalisanja

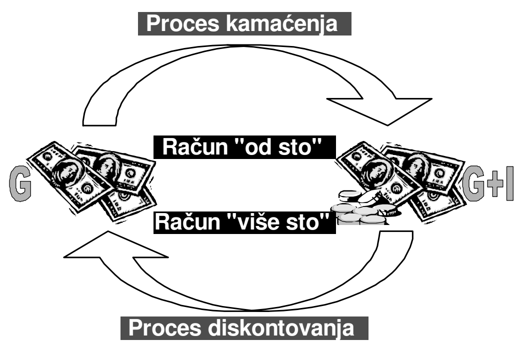
Interesni ili kamatni račun je srazmerni račun zasnovan na procentnom računu, a od njega se razlikuje po tome što uključuje i vreme kao faktor. Interesni račun se koristi u poslovima regulisanja kreditnih odnosa koji nastaju između dužnika i poverioca.

Interes ili kamata je naknada koju dužnik plaća poveriocu za korišćenje pozajmljenog novca na određeno vreme. Interes se može obračunavati dekurzivno i anticipativno.

Dekurzivno obračunavanje interesa se obavlja krajem perioda, za protekli period (unazad), na raniju (diskontovanu) vrednost, kao čistu glavnicu, pa je stoga kasnija (ukamaćena) vrednost uvećana glavnica.

Odnos ranije i kasnije vrednosti pri dekurzivnom obračunavanju interesa možemo, u svrhu boljeg razumevanja, šematski prikazati na tzv. vremenskoj liniji kojom predstavljamo samo jedan obračunski period (Slika 1).

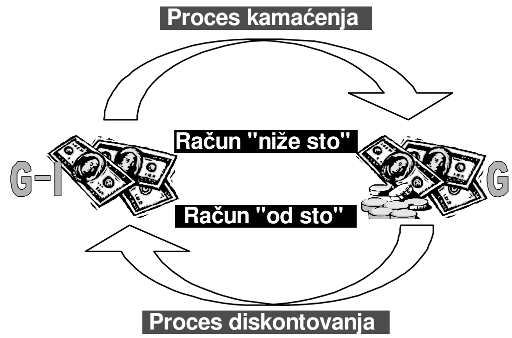
Slika 1



G je oznaka za čistu glavnicu;
I je oznaka za interes ili kamatu;
G + I je oznaka za uvećanu glavnicu (glavnicu uvećanu za interes).

Anticipativno obračunavanje interesa se obavlja početkom perioda, za period unapred, na kasniju vrednost kao čistu glavnicu, pa je stoga ranija vrednost umanjena glavnica (Slika 2).

Slika 2



Kada je reč o dužničko–poverilačkim odnosima između privrednih i drugih subjekata treba reći da se kamata obračunava u određenim vremenskim intervalima (npr. godišnje) ili po isteku perioda kamaćenja koji je ugovoren. Kamata se, zavisno od propisa ili dogovora, po obračunu ili isplaćuje posebno u dogovorenom roku ili se pripisuje glavnici radi daljeg kamaćenja.

Postupak obračuna kamate i njenog pripisivanja glavnici naziva se kapitalisanje. Pojam kapitalisanja se u praksi komplikuje zbog različitih varijanti zadatih (propisanih, ugovorenih ili dogovorenih) kamatnih stopa o čemu će u nastavku biti reči detaljnije.

Obračun kamata, bez obzira da li se vrši dekurzivno ili anticipativno, mora biti zasnovan na sledećim principima:

1) **Princip zajedničkog roka**, što znači da novčani iznosi, ili druge veličine koje se koriste umesto njih, radi uporedivosti moraju biti svedeni (kamaćenjem ili diskontovanjem) na isti rok.
2) **Princip ekvivalencije odnosno jednakosti uplata i isplata** svedenih na isti rok.

Oblast matematike koja za predmet izučavanja ima interesni račun i modalitete njegove primene nazivamo finansijska matematika. Primetimo da zadatak finansijske matematike nije određivanje uslova uspostavljanja dužničko–poverilačkih odnosa, već korektno matematičko rešavanje problema nastalih u dogovoreno (ugovoreno) ili zakonski uspostavljenim dužničko–poverilačkim odnosima.

2.2. Prost interes

Interes koji se svakog perioda računa na istu glavnicu je konstantna veličina i naziva se **prost interes**.

U svrhu formiranja odgovarajućih obrazaca za obračun kamate, uvodimo sledeće oznake:

- **p** je oznaka za interesnu (kamatnu) stopu i predstavlja interes (kamatu) na 1 novčanu jedinicu (npr. 1 dinar) glavnice, za 1 period (najčešće za 1 godinu);
- **g** je oznaka za vreme izraženo u godinama. Tako npr. ako je potrebno izračunati kamatu za 3 godine onda je $g = 3$, za 5 meseci $g = \frac{5}{12}$, a za 78 dana $g = \frac{78}{365}$ (za prostu godinu) ili $g = \frac{78}{366}$ (za prestupnu godinu);
- **K** je oznaka za raniju (početnu) ili diskontovanu vrednost;
- **Kg** je oznaka za kasniju (krajnju) ili ukamaćenu vrednost (vrednost K posle g godina);
- **I** je oznaka za ukupnu kamatu ostvarenu u periodu od g godina, pri čemu je $I = Kg - K$, a $\frac{I}{g}$ je kamata u jednom periodu (godini), inače konstantna veličina zbog obračuna proste kamate, tj. važi:

$$I_1 = I_2 = ... = \frac{I}{g}.$$

Prema uvedenim oznakama i proporciji $G : P = 1 : p$, za dekurzivno obračunavanje interesa biće: $G = K$, $P = \frac{I}{g}$, pa će dalje biti:

$$K : \frac{I}{g} = 1 : p \Rightarrow \frac{I}{g} = Kp, \quad \text{tj.}$$

$$I = Kpg \qquad \textbf{(5)}$$

$$Kg = K + I = K + Kpg$$

$$Kg = K\,(1 + pg) \qquad \textbf{(6)}$$

Može i ovako:

$$I_1 = Kp,\ I_2 = Kp,\ ...,\ Ig = Kp$$

$$I = \sum_{j=1}^{g} I_j = g \cdot Kp = Kpg$$

Primer 1.

Obračunati 20% interesa na iznos od 18000 din. za vreme od: a) 7 godina; b) 5 meseci; c) 73 dana; d) 7 godina i 73 dana.

☛ **Rešenje:**

c)

$g = \frac{73}{365}$

$I = 18000 \cdot 0{,}1 \cdot \frac{73}{365} = 360$ din.

Kamata za 1 dan je 365-ti ili 366-ti deo godišnje kamate.

$Kg = K + I = 18360$ din.

Kamata u jednoj godini iznosi:

$\frac{I}{g} = \frac{360}{\frac{73}{365}} = 1800$ din.

d)

$g = 7\frac{73}{365}$

$I = 18000 \cdot 0{,}1 \cdot (7 + \frac{73}{365}) = 12960$ din.

$Kg = K + I = 30960$ din.

$\frac{I}{g} = \frac{12960}{7 + \frac{73}{365}} = 1800$ din.

Ako je obračunavanje kamate anticipativno, jednostavnije je koristiti izvedenu proporciju za $G : P = 1 : p$, tj. proporciju: $(G - P) : (1 - p) = P : p$ pri čemu je, s obzirom na definiciju anticipativnog obračunavanja interesa i uvedenih oznaka:

$$G - P = K; \quad P = \frac{I}{g}$$

pa je dalje:

$$K : (1 - p) = \frac{I}{g} : p \Rightarrow \frac{I}{g} (1 - p) = Kp$$

$$I = K \cdot \frac{pg}{1-p} \qquad (7)$$

$$Kg = K + I = K + K \cdot \frac{pg}{1-p}$$

$$Kg = K\left(1 + \frac{pg}{1-p}\right) \qquad (8)$$

Može i ovako:

$$I_1 = K \cdot \frac{p}{1-p}; \quad I_2 = K \cdot \frac{p}{1-p}, \ldots, \quad I_g = K \cdot \frac{p}{1-p}$$

$$I = \sum_{j=1}^{g} I_j = gK \cdot \frac{p}{1-p} = K \cdot \frac{pg}{1-p}, \text{ zbog } I_1 = I_2 = \ldots = \frac{I}{g}$$

a može i ovako:

$$I_1 = (K + \frac{I}{g})\, p,\ I_2 = (K + \frac{I}{g})p, \ldots, \quad I_g = (K + \frac{I}{g})p$$

$$I = \sum_{j=1}^{g} I_j = g \cdot (K + \frac{I}{g})\, p = Kpg + pI$$

$$I\,(1\text{-}p) = Kpg \Rightarrow I = K \cdot \frac{pg}{1-p}$$

$K + \frac{I}{g}$ je vrednost K krajem perioda, tj. iznos na koji se (prema definiciji anticipativnog obračunavanja interesa) računa kamata u jednom periodu, pa se $K + \frac{I}{g}$ tretira kao čista glavnica, dok je K umanjena glavnica.

2.3. Složen interes

2.3.1. Problem kamaćenja jednokratnih, sporadičnih (pojedinačnih) plaćanja

Interes koji se svakog perioda računa na uloženu sumu (glavnicu) i na dospeli interes iz ranijih perioda naziva se **interes na interes** ili **složen interes**.
Polazeći od ranije usvojenih oznaka, za dekurzivno obračunavanje složenog interesa važi:

$K_1 = K + I_1 = K + K \cdot p \cdot 1 = K\,(1+p)$ je ukamaćena vrednost K novčanih jedinica (npr. din) na kraju prve godine, dok je I_1, interes u prvoj godini.

$K_2 = K_1 + I_2 = K_1 + K_1 \cdot p \cdot 1 = K_1\,(1+p) = K(1+p)^2$ je ukamaćena vrednost K din na kraju druge godine, dok je I_2 interes u drugoj godini.

Dalje će po analogiji biti:

$$K_3 = K(1+p)^3 \text{ itd.}$$

Zaključujemo da važi:

$K_g = K(1+p)^g$, $g \in N$ **(9)**

- $1 + p$ je ukamaćena vrednost jednog dinara za jednu godinu uz kamatnu stopu p.

Dalje zaključujemo da $K_1, K_2, ..., K_n$ predstavljaju članove geometrijskog niza sa količnikom $1+p$.

Za anticipativno obračunavanje interesa važi:

$$K_1 = K + I_1 = K + K \cdot \frac{p}{1-p} = K(1-p)^{-1}$$

$$K_2 = K_1 + I_2 = K_1 + K \cdot \frac{p}{1-p} = K(1-p)^{-2}$$

$K_g = K(1-p)^{-g}$, $p < 100\%$ **(10)**

(9) i (10) bi se moglo prikazati objedinjeno ovako:

$K_g = K(1\pm p)^{\pm g}$, pri čemu bi se znak + koristio za dekurzivno, a znak – za anticipativno obrčunavanje interesa.

Koristeći savremene tehnike (računare) računanju numeričke vrednosti izraza $(1\pm p)^{\pm g}$, odnosno $(1\pm p)^{\mp g}$, za željene vrednosti p i g možemo brzo i lako izračunati. U praksi se mogu naći sada već zastarele tablice izračunatih vrednosti za ove izraze za određene vrednosti p i g. Prema ovim tablicama je $K_g = K \cdot I_p^g$, $K = K_g \cdot II_p^g$ (I_p^g i II_p^g označavaju broj tablice u kojoj se nalazi željeni broj).

Prikazani postupak konstrukcije formule (9) podrazumeva broj godina izražen celim brojem i godišnje kapitalisanje. Međutim, kamata se u praksi retko obračunava za ceo broj godina, već najčešće za vremenski period koji je kombinacija određenog broja godina i određenog broja dana. Nadalje, složenost odnosa u savremenom poslovanju i sloboda ugovaranja uslova kamaćenja iskomplikovali su pojam kapitalisanja, nominalne stope i godine kao osnovnog perioda za obračun kamate.

U praksi se nameće potrebna rešavanja problema češćeg kapitalisanja od godišnjeg i obračuna kamate za vremenski period koji je manji od perioda u kome se obavlja jedno kapitalisanje.

Ako je p oznaka za nominalnu (datu, uglavnom godišnju) kamatnu stopu i ako je m oznaka za broj kapitalisanja u jednoj godini, onda se postupkom koji važi za formiranje formule (9) dolazi do jednačine (formule):

$K_g = K(1+p/m)^{mg}$, $mg \in N$ **(11)**

- Izraz p/m se naziva relativna kamatna stopa.
- $1+p/m$ je ukamaćena vrednost jednog dinara za 1 period kapitalisanja, uz stopu p/m.

Odgovarajuća formula za anticipativno obračunavanje interesa je:

$K_g = K(1-p/m)^{-mg}$, $p/m < 100\%$ **(12)**

Primer 2.

Pozajmljen je iznos od 1.000 din. na 5 godina, uz 18% kamate godišnje i kapitalisanje:

a) godišnje,

b) polugodišnje (semestralno),
c) tromesečno (kvartalno),
d) mesečno.
e) dnevno.

Koliko dužnik treba da vrati poveriocu?

☞ **Rešenje:**

K = 1.000; g = 5; p=18% = 0,18.

a) m = 1,
$K_g = 1.000 \cdot (1+0,18/1)^{1 \cdot 5} = 1.000 \cdot 1,18^5 = 2.287,76$ din;

b) m = 2,
$K_g = 1.000 \cdot (1+0,18/2)^{2 \cdot 5} = 1.000 \cdot 1,09^{10} = 2.367,36$ din;

c) m = 4,
$K_g = 1.000 \cdot (1+0,18/4)^{4 \cdot 5} = 1.000 \cdot 1,045^{20} = 2.411,71$ din;

d) m = 12,
$K_g = 1.000 \cdot (1+0,18/12)^{12 \cdot 5} = 1.000 \cdot 1,015^{60} = 2.443,22$ din;

e) m = 365,
$K_g = 1.000 \cdot (1+0,18/365)^{365 \cdot 5} = 2.459,06$ din;

Ovo je ilustrativni primer, a u praksi je period kamaćenja određen datumima. Da je to učinjeno u ovom primeru onda bi jedna ili dve godine bile prestupne, pa bi rezultati bili nešto drugačiji.

Kažimo još i to da kamatna stopa za periode kapitalisanja, kraće od jedne godine ne mora nastati deljenjem godišnje stope sa ***m***; ona jednostavno može kao takva biti zadata, tj. data kao polugodišnja, tromesečna, mesečna ili dnevna.
U takvom slučaju se (11) može prikazati u obliku:

$$K_g = K \cdot \left(1 + p_N\right)^n \qquad \textbf{(11a)}$$

n je oznaka za broj obračunavanja kamate sa nominalnom stopom $\boldsymbol{p_N}$

Uočimo da sa češćim kapitalisanjem zbog upotrebe relativne kamatne stope, ukamaćena vrednost, za isto vreme, biva sve veća, zatim da je to povećanje sve manje i da nije teško pretpostaviti da ukamaćena vrednost ima graničnu vrednost za slučaj da broj kapitalisanja u jednoj godini teži u beskonačno. Reč je tada o tzv. **kontinuelnom kapitalisanju**, pri kojem vremenski interval između dva kapitalisanja teži nuli, za razliku od kapitalisanja kao što su ona u 1. primeru pod a) do e) koje tretiramo kao diskontinuelna.

U slčaju da je obračunavanje interesa anticipativno ukamaćena vrednost za Primer 2. bi bila:
a) 2.697,31; **b)** 2.567,95; **c)** 2.511,50; **d)** 2.460,15.

Dalje zaključujemo da, ako je kapitalisanje kontinuelno, onda broj kapitalisanja teži u beskonačno u bilo kom konačno datom vremenskom intervalu, a ne samo u jednoj godini (ovo ima veze sa činjenicom da ∞ podeljeno sa konačnim brojem daje za rezultat ∞).
Neka je p_N oznaka za datu, nominalnu kamatnu stopu (ona može biti i godišnja p) i neka je n oznaka za odgovarajući broj perioda na koje se odnosi p_N, tada će biti:

$$K_g = K \lim_{m \to \infty} (1 \pm p_N/m)^{\pm mn}$$

$$K_g = K \cdot \lim_{m/P_N \to \infty} \left((1 \pm p_N / m)^{\pm m/p_N} \right)^{np_N}$$

$$K_g = K \cdot e^{np_N} \tag{13}$$

Specijalno za $p_N = p$, biće $n = g$ i:

$$K_g = K \cdot e^{gp} \tag{13a}$$

Kontinuelno kapitalisanje može i ima smisla da se primeni u analizi kretanja mnogih prirodnih i društvenih procesa, a možda bi ga trebalo i imalo smisla primeniti i u slučaju obračuna kamata.

Koristeći podatke iz 2. primera za slučaj kontinuelnog kapitalisanja dobije se:

$K_g = 1.000 \cdot e^{5 \cdot 0,18} = 2.459,60$ din,
dok bi se (radi poređenja) za slučaj obračuna prostog interesa dobilo:

$K_g = 1.000 \cdot (1 + 0,18 \cdot 5) = 1.900$ din.

Kamatnu stopu p_c kojom se sa m obračuna kamate u jednoj godini postiže isti efekat (ista ukamaćena vrednost) kao sa jednim obračunom kamate sa godišnjom stopom p, nazivamo konformna kamatna stopa, a dobijamo je iz jednačine:

$$(1+ p_c)^m = 1 + p \Rightarrow p_c = (1 + p)^{1/m} - 1 \tag{14}$$

a za slučaj kontinuelnog kapitalisanja važi:

$$e^{p_c} = 1 + p \Rightarrow p_c = \ln(1+p) \tag{14a}$$

pri čemu, u ovom obrascu p_c znači godišnju stopu kojom bi se kontinuelnim kapitalisanjem za isto vreme ostvario isti efekat koji bi se postigao godišnjim kapitalisanjem sa stopom p.

U slučaju koji predstavlja 2. primer biće:

a) $m = 1$, $p = 0,18 = 18\%$; $p_c = 1,18^{1/1} - 1 = 0,18 = 18\%$

b) $m = 2$, $p_c = 1,18^{1/2} - 1 = 8,6278\% < p/2 = 9\%$ je stopa kojom za 5 godina polugodišnjim obračunom kamate 1.000 din. poraste na 2287,76 din tj. na iznos koji bi se dobio godišnjim obračunom kamate sa 18% godišnje.

c) $m = 4$, $p_c = 1,18^{1/4} - 1 = 4,2246636\% < p/4 = 4,5\%$

d) $m = 12$, $p_c = 1,18^{1/12} - 1 = 1,388843\% < p/12 = 1,5\%$

e) $m = 365$, $p_c = 1,18^{1/365} - 1 = 0,0453567\% < p/365$

f) $m \to \infty$, $p_c = \ln 1,18 = 16,5514438\% < p = 18\%$

Ova poslednja stopa pokazuje koliko bi trebalo da bude godišnja stopa da bi se kamata obračunavala kontinuelno, a krajnji efekat željeo isti kao jednim obračunom kamate godišnje uz $p=18\%$.

U vezi sa konformnom kamatnom stopom u praksi nastaje i ova situacija: U datom periodu (konačnom) kapitalisanja (koje ne mora biti godišnje) sa relativnom stopom p/m, iz određenih razloga, želi se više puta (npr. s puta) obračunati kamata, ali tako da se u tom periodu ostvari isti efekat koji bi se postigao jednim obračunom kamate sa stopom p/m. Ovo se ne može ostvariti stopom p/m podeljenom sa s, već sa odgovarajućom konformnom kamatnom stopom p_c, koja se dobije iz jednačine:

$$(1 + p_c)^s = 1 + p/m \Rightarrow p_c = (1 + p/m)^{1/s} - 1 \qquad \textbf{(15)}$$

a za slučaj kontinuelnog kapitalisanja važi:

$$e^{p_c} = 1 + p/m \Rightarrow p_c = \ln(1 + p/m) \qquad \textbf{(15a)}$$

pri čemu u ovom obrascu, p_c znači kamatnu stopu kojom se uz kontinuelno kapitalisanje postigne isti efekat kao jednim obračunom kamate sa relativnom stopom p/m u datom konačnom periodu kapitalisanja.

Na ovaj način su rešeni i problemi obračuna kamate za vremenski period kraći od jednog punog perioda datog kapitalisanja, tj. manji od m–tog dela godine, izuzev za određen broj dana, zbog toga što ni dve uzastopne godine, ni dva uzastopna polugodišta, ni dva uzastopna tromesečja, pa ni dva uzastopna meseca ne moraju sadržati isti broj dana. Ovaj problem možemo rešiti na sledeći način:

1) Ako je između dužnika i poverioca dogovorena, ugovorena ili zakonski propisana upotreba konformne kamatne stope, onda će biti:

$$Kg = K(1 + p/m)^{d_1/s_1 + mg + d_2/s_2} \qquad \textbf{(16)}$$

pri čemu je $0 \le d_1 < s_1$; $0 \le d_2 < s_2$; zatim

- d_1 je oznaka za broj dana, koji prethodi prvom celom periodu datog kapitalisanja, za koji treba obračunati kamatu;
- s_1 je oznaka za ukupan broj dana u periodu kapitalisanja kome pripada d_1.
- d_2 je oznaka za broj dana, koji sledi posle poslednjeg celog perioda datog kapitalisanja, za koji treba obračunati kamatu;
- s_2 je oznaka za ukupan broj dana u periodu kapitalisanja kome pripada d_2.

2) Ako je dogovorena, ugovorena ili propisana upotreba prostog interesa za vremenske periode koji su kraći od punog perioda datog kapitalisanja, onda važi:

$$K_g = K(1 + p \cdot \frac{d_1}{dg_1})(1 + p/m)^{mg}(1 + p \cdot \frac{d_2}{dg_2}) \qquad \textbf{(17)}$$

pri čemu je $0 \le d_1 < dg_1$; $0 \le d_2 < dg_2$.

- dg_1 je oznaka za broj dana u godini kojoj pripada d_1,
- dg_2 je broj dana u godini kojoj pripada d_2 (dg_1 i dg_2 mogu biti 365 ili 366).

3) Ako je dogovoreno, ugovoreno ili propisano kontinuelno kapitalisanje, onda važi:

$$K_g = K \cdot e^{p(d_1/dg_1 + g + d_2/dg_2)} \qquad \textbf{(18)}$$

Primetimo da za $d_1 = d_2 = 0$, obrasci (16) i (17) postaju (11), a (18) postaje (13a).

Primer 3.

16.2.2008. godine dato je na kamaćenje 8.000 din uz 16% kamate godišnje. Sa kojim iznosom će se raspolagati na dan 17.9.2011. godine ako je kapitalisanje:

a) godišnje,

b) polugodišnje,
c) tromesečno,
d) mesečno,
e) dnevno i
f) kontinuelno,

i ako se

1) upotrebljava konformna kamatna stopa,
2) upotrebljava kombinacija prostog i složenog interesa.

☞ **Rešenje:**

a) 1) $K_g = 8.000 \cdot 1{,}16^{319/366+2+260/365} = 13.617{,}64$ din.
2) $K_g = 8.000\ (1+0{,}16\cdot (319/366)) \cdot 1{,}16^2(1+0{,}16\cdot(260/365)) = 13.663{,}98$ din.

b) 1) $K_g = 8.000 \cdot 1{,}08^{135/182+6+79/184} = 13.892{,}34$ din.
2) $K_g = 8.000(1+0{,}16 \cdot (135/366)) \cdot 1{,}08^6 \cdot (1+0{,}16 \cdot (79/365)) = 13.909{,}78$ din.

c) 1) $K_g = 8.000 \cdot 1{,}04^{44/91+13+79/92} = 14.040{,}60$ din.
2) $K_g = 8.000 \cdot (1+0{,}16 \cdot (44/336)) \cdot 1{,}04^{13} \cdot (1+0{,}16 \cdot (79/365)) = 14.046{,}98$ din.

d) 1) $K_g = 8.000 \cdot (1+0{,}16/12)^{13/29+42+17/30} = 14.142{,}50$ din.
2) $K_g = 8.000 \cdot (1+0{,}16 \cdot 13/366)) \cdot (1+0{,}16/12)^{42} \cdot (1+0{,}16 \cdot (17/365)) = 14.137{,}52$ din.

e) $K_g = 8.000 \cdot (1+0{,}16/366)^{319} \cdot (1+0{,}16/365)^{990} = 14.192{,}90$ din.

f) $K_g = 8.000 \cdot e^{0{,}16\cdot(319/366+2+260/365)} = 14.194{,}69$ din.

2.3.2. Problem diskontovanja jednokratnih, sporadičnih plaćanja

Transformacijom (9), (11), (11a), (13), (16), (18), (17) i (18) dobiju se odgovarajući obrasci (formule) za izračunavanje diskontovane vrednosti K:

$$K = K_g(1+p)^{-g} \qquad \textbf{(19)}$$

$$K = K_g(1+p/m)^{-mg} \qquad \textbf{(20)}$$

$$K = K_g(1+p_N)^{-n} \qquad \textbf{(21)}$$

$$K = K_g \cdot e^{-n\cdot p_N} \qquad \textbf{(22)}$$

$$K = K_g \cdot e^{-g\cdot p} \qquad \textbf{(23)}$$

$$K = K_g \cdot (1+p/m)^{-(d_1/s_1+mg+d_2/s_2)} \qquad \textbf{(24)}$$

$$K = K_g \cdot (1+p\cdot(d_1/d_{g_1}))^{-1} \cdot (1+p/m)^{-m\cdot g} \cdot (1+p(d_2/d_{g_2}))^{-1} \qquad \textbf{(25)}$$

$$K = K_g \cdot e^{-p(d_1/s_1+g+d_2/s_2)} \qquad \textbf{(26)}$$

Rad sa konkretnim primerima je vrlo sličan onom koji smo imali za izračunavanje K_g, pa je obrada primera ovoga puta nepotrebna.

2.3.3. Problem izračunavanja interesa (kamate)

Interes je razlika između ukamaćene i diskontovane vrednosti, tj.

$$I = K_g - K \qquad \textbf{(27)}$$

Ako je poznata samo jedna od vrednosti K i Kg onda se druga izračunava prema već objašnjenim, prikazanim obrascima, a moće se ispostaviti i direktna funkcionalna veza između interesa s jedne i ukamaćene odnosno diskontovane vrednosti s druge strane, tj.

$$I = f(K) \text{ odnosno } I = f(K_g)$$

Za slučaj $K_g=K(1+p)^g$ biće:

$$I = K(1+p)^g - K \sim I = K\,((1+p)^g - 1) \sim K = I/((1+p)^{-g} - 1) \quad \textbf{(28)}$$

Na sličan način se dobiju obrasci i za druge situacije:

$$I = K\,((1 + p/m)^{mg} - 1) \quad \textbf{(29)}$$

$$I = K\,((1 + p_N)^n - 1) \quad \textbf{(30)}$$

$$I = K\,(e^{n \cdot p_N} - 1) \quad \textbf{(31)}$$

$$I = K\,(e^{g \cdot p} - 1) \quad \textbf{(32)}$$

$$I = K \cdot ((1 + p/m)^{-(d_1/s_1 + mg + d_2/s_2)} - 1) \quad \textbf{(33)}$$

$$I = K \cdot ((1+p\cdot(d_1/d_{g_1}))\cdot(1+p/m)^{m\cdot g}\cdot(1+p(d_2/d_{g_2}))-1) \quad \textbf{(34)}$$

$$I = K \cdot (e^{p(d_1/dg_1 + g + d_2/dg_2)} - 1) \quad \textbf{(35)}$$

Na isti način se dobiju obrasci i za ostale situacije.

Bez poteškoća se dobije i $I = f(K_g)$. Npr. za $K_g = K(1+p/m)^{m\cdot g}$ biće:

$$I = K_g - K = K_g - K_g\,(1+p/m)^{-mg} = K_g(1-(1+p/m)^{-m\cdot g}) \sim K_g = \frac{1}{1-(1+p/m)^{-m\cdot g}} \quad \textbf{(36)}$$

Na isti način se mogu dobiti obrasci i za ostale slučajeve, samo je pitanje praktične koristi od takvih obrazaca.

2.3.4. Problem izračunavanja kamatne stope

Transformacijom jednačine (9) dobijamo:

$$(1+p)^g = K_g/K \sim p = (K_g/K)^{1/g} - 1 \quad \textbf{(37)}$$

Slično dobijemo i sledeće:

$$p/m = (K_g/K)^{1/mg} - 1 \quad \textbf{(38)}$$

$$p_N = (K_g/K)^{1/n} - 1 \quad \textbf{(39)}$$

$$p_N = (1/n) \cdot \ln(K_g/K) \quad \textbf{(40)}$$

$$p = (1/g) \cdot \ln(K_g/K) \quad \textbf{(41)}$$

$$p/m = (K_g/K)^{1/(d_1/s_1 + mg + d_1/s_1)} - 1 \quad \textbf{(42)}$$

$$p = \frac{\ln(K_g/K)}{d_1/d_{g_1} + g + d_2/d_{g_2}} \quad \textbf{(43)}$$

Međutim, iz (16) p nije moguće eksplicitno izraziti. Do rešenja je moguće doći samo metodima približnog računanja (npr. iterativnim metodom), ali je pitanje praktične koristi od toga, jer se problem takve vrste u praksi ne pojavljuje.

Primer 4.

16.2.2000. je dato na kamaćenje 8.000 din. Uz koju godišnju stopu će ovaj iznos porasti za 5.617,64 din. za vreme do 17.9.2000. ako je kapitalisanje:
a) godišnje uz upotrebu konformne stope,

b) kontinuelno?

☞ **Rešenje:**

$K = 8.000$; $K_g = 13.617{,}64$; $m=1$; $g=2$; $s_1 = 366$; $d_1=319$; $s_2 = 365$; $d_2 = 260$.

a) $p = (13.617{,}64/8.000)^{1/(319/366 + 2 + 260/365)} - 1 = 0{,}16 = 16\%$

b) $p = \dfrac{\ln(13.617{,}64/8.000)}{319/366 + 2 + 260/365} = 0{,}14842 = 14{,}842\%$

Primer 5.

Uz koju mesečnu stopu će se bilo koji iznos koji iznos dat na kamaćenje 15.2.2004. utrostručiti za 67 dana, tj. do 22.4.2004. ako se podrazumeva:

a) upotreba konformne kamatne stope,
b) kontinuelno kapitalisanje?

☞ **Rešenje:**

$K_g = 3 \cdot K$

a) $K\,(1+p_M)^{14/29+1+22/30} = 3 \cdot K$

$p_M = 3^{1/(14/29+1+22/30)} - 1 = 64{,}17177\%$

b) $K \cdot e^{p_M(14/2+1+22/30)} = 3 \cdot K$

$p_M = \dfrac{\ln 3}{14/29 + 1 + 22/30} = 49{,}5743\%$

Primer 6.

Uz koju dnevnu stopu će se realizovati uslovi iz 5. primera?

☞ **Rešenje:**

a) $K(1+p_d)^{67} = 3 \cdot K$

$p_d = 3^{1/67} - 1 = 1{,}653237\%$

b) $K \cdot e^{67 \cdot p_d} = 3 \cdot K$

$p_d = (\ln 3)/67 = 1{,}639719\%$

2.3.5. Problem izračunavanja broja perioda kamaćenja, odnosno određivanja vremenskog intervala kamaćenja

Ovaj problem se svodi na određivanje vremenskog perioda (intervala) koji protekne od dana ulaganja (pozajmljivanja) do dana podizanja (vraćanja) tj. vremenskog perioda u kojem je neki iznos bio pod kamaćenjem.

Iz (9) se eksplicitno može izraziti broj perioda koji predstavlja vreme kamaćenja.

$$(1+p)^g = K_g/K,$$

$$g \cdot \ln(1+p) = \ln(K_g/K),$$

$$g = \frac{\ln(K_g/K)}{\ln(1+p)} \qquad \textbf{(44)}$$

Sličnim postupkom se dalje dobije:

$$mg = \frac{\ln(K_g/K)}{\ln(1+p/m)} \qquad \textbf{(45)}$$

$$n = \frac{\ln(K_g/K)}{\ln(1+p_N)} \qquad \textbf{(46)}$$

$$n = \frac{\ln(K_g / K)}{p_N} \quad \textbf{(47)}$$

$$g = \frac{\ln(K_g / K)}{p} \quad \textbf{(48)}$$

Za ostale situacije (16), (17) i (18) nije moguće dati eksplicitni oblik, ali ćemo pokazati mogućnost rešavanja konkretnih problema i za takve slučajeve.

Primer 7.

Za koje vreme će iznos od 8.000 din. uložen 16.2.2000. porasti, uz 16% kamate godišnje, na:
a) 13.617,64 din uz godišnje kapitalisanje i upotrebu konformne kamatne stope za nepotpune periode;
b) 13.663,98 din uz godišnje kapitalisanje i upotrebu prostog interesa za nepotpune periode;
c) 14.194,69 din. uz kontinuelno kapitalisanje?

☞ **Rešenje:**

a) K = 8.000, Kg = 13.617,64, p = 0,16

8.000 din ukamaćeno do kraja 2000. godine tj. do prvog obračuna kamate, iznosi:

$8.000 \cdot 1{,}16^{319/366} = 9.104{,}80$ din.

Dalje se pitamo, koliko godina treba kamatiti 9.104,80 din da bi se raspolagalo sa 13.617,64 din, tj.

$9.104{,}80 \cdot 1{,}16^{g} = 13.617{,}64$; $\quad g = \dfrac{\ln(13.617{,}64 / 9.104{,}80)}{\ln 1{,}16} = 2{,}712328766.$

Znači, traženi dan kraja vremena kamaćenja se nalazi u 2003. godini, a broj dana kamaćenja u 2003. godini dobije se ovako:

$0{,}712328766 \cdot 365 = 260$ dana

Prema tome sa 13.617,64 din će se pri uslovima pod a) raspolagati 17.9.2003. godine.

Ovo se može uraditi i kraće, ovako:

$8.000 \cdot 1{,}16^{g} = 13.617{,}64$

$g = \dfrac{\ln(13.617{,}64 / 8.000)}{\ln 1{,}16} = 3{,}583913465.$

$3{,}583913465 – 319/366 = 2{,}712328766$

$0{,}712328766 \cdot 365 = 260$

b) Postupa se slično kao pod a)

$8.000 \cdot (1+0{,}16 \cdot (319/366)) = 9.115{,}63$ din.

$g = \dfrac{\ln(13.663{,}98 / 9115{,}63)}{\ln 1{,}16} = 2{,}72721024.$

Dalje se, s obzirom na kombinaciju prostog interesa, radi ovako:

$9.115{,}63 \cdot 1{,}16^{2} = 12.265{,}99$ din je ukamaćena vrednost na dan 31.12.2002. godine, pa će biti:

$12.265{,}99 \cdot (1+0{,}16 \cdot (d_2/365)) = 13.663{,}98$

$d_2 = \left(\dfrac{13.663{,}98}{12.265{,}99} - 1\right) \cdot \dfrac{365}{0{,}16} = 260$ dana.

Znači poslednji dan kamaćenja je 17.9.2003.

U ovom slučaju nije moguć kraći postupak.

Primer 8.

Na koje vreme je dana 15.2.2000. pozajmljeno 1.000 din, ako dužnik treba da vrati 1.185,96 din i ako se računa 8% kamate mesečno uz upotrebu konformne kamatne stope?

☞ **Rešenje:**

$1.000 \cdot 1{,}08^{M} = 1.185{,}96$

$M = \dfrac{\ln(1.185{,}96/1.000)}{\ln 1{,}08} = 2{,}216089734$ meseci

$2{,}216089734 - 14/29 = 1{,}73333113$ meseci

$0{,}73333113 \cdot 30 = 22$ dana

Objašnjenje: od 2,216 meseci je oduzeto 14 dana u februaru, tj. 14/29 meseci, zatim je od 1,73333 meseci oduzet 1 mesec (mart), pa ostatak od 0,73333 meseci čini 22 dana u aprilu.

Prema tome, dužnik treba da vrati pozajmljeni novac sa kamatom zajedno dana 22.4.2000.

Primer 9.

Dana 22.04.2000. dužnik je vratio 64,975% više nego što je pozajmio. U periodu dogovaranja kamata se računala 0,75% dnevno. Kada je pozajmljen novac?

☞ **Rešenje:**

$K_g = K + 0{,}64975K = 1{,}64975K$

$K \cdot 1{,}0075^{d} = 1{,}64975\,K,$

$d = \dfrac{\ln 1{,}64975}{\ln 1{,}0075} = 67$

Prema tome, novac je pozajmljen 15.02.2000. godine.

3. ESKONTOVANJE MENICA

Menica je hartija od vrednosti sa zakonski određenom formom, a služi u poslovima regulisanja dužničko–poverilačkih odnosa, kao sredstvo obezbeđenja kredita, kao sredstvo obezbeđenja plaćanja i kao sredstvo (instrument) plaćanja.

Ako menica sadrži nalog (naredbu) izdavaoca (**trasant**) izdat (upućen) drugom licu (**trasat**), kod koga izdavalac ima (ili treba da ima) pokriće ili mogućnost zaduženja, da u određeno vreme isplati trećem licu (**remitent**) sumu novca upisanu na menici, onda je reč o tzv. **trasiranoj ili vučenoj menici**.

Kaže se:

1) dužnik (trasant) trasira (izdaje i potpisuje) menicu koju predaje poveriocu (remitentu) kao garanciju da će dug biti isplaćen na dan dospeća menice;
2) poverilac (prodavac robe) vuče na svoga dužnika (kupca) menicu koju ovaj akceptira (potpisuje).

Primer:

Fabrika bicikla "Partizan" Subotica prodala je određenu količinu bicikla preduzeću "Metal" Banja Luka i za prodatu robu dostavlja fakturu. "Metal" prema dogovoru sa FB "Partizan" ne plaća isporučenu robu odmah, već 7.9.1987. izdaje menicu na iznos od 23.169.888 din. sa rokom dospeća 2.12.87. Ovom menicom "Metal" daje nalog Privrednoj banci, Sarajevo – Osnovna banka Banja Luka da 2.12.87. isplati FB "Partizan" sumu označenu na menici.

U ovom primeru važi sledeće:

"Metal" – Banja Luka je trasant; FB "Partizan", Subotica je remitent; Privredna banka Sarajevo – Osnovna banka Banja Luka je trasat, a ako potpisom menice jamči (garantuje) plaćanje, onda je i avalista (menično jemstvo = aval).

Ako menica sadrži bezuslovno obećanje (obavezu) da će biti isplaćena suma novca upisana na menici, onda je reč o tzv. **sopstvenoj menici**, u kojoj su trasant i trasat isto lice.

Ako menica sadrži samo potpis trasanta, a remitent je ovlašćen da ispuni menicu, shodno ugovoru o meničnom poslu, tj. poslu zbog koga se menica i izdaje, onda je reč o tzv. **blanko menici**.

U našoj praksi, kada su u upotrebi, uglavnom se koriste trasirane menice, pa će dalje biti reči samo o njima.

Iznos na koji glasi menica se naziva **nominalna vrednost ili menični iznos**. Smatra se prirodnim da prodavac robe zahteva od kupca da menicu potpiše na takav iznos koji će obuhvatiti vrednost robe po fakturi uvećanu za kamatu za vreme od izdanja menice do dana dospeća menice, tj. do konačne isplate duga (podrazumevajući da je menica izdata na dan kada je dug trebalo platiti po fakturi). Kamata koja se obračunava u poslovanju s menicama naziva se **eskont**. Prema tome prirodno je nominalnu vrednost tretirati kao uvećanu glavnicu, a vrednost meničnog posla kao čistu glavnicu.

Eskontovati menicu znači kupiti je, a diskontovati, prodati je pre njenog roka dospeća.

Kada imalac menice podnese menicu na eskontovanje da bi svoje potraživanje po meničnom poslu ostvario pre roka dospeća menice kaže se da je izvršeno tzv. **indosiranje menice**, tj. da je izvršeno prenošenje prava po menici na neko drugo lice – indosatora. Imalac menice koji svoja prava prenosi na indosatora naziva se indosant, pri čemu je remitent prvi indosant. Indosiranje se vrši uz izjavu indosanta, koja se najčešće daje na poleđini menice a koja se naziva **indosament ili indosman**. Ako je izvedeno indosiranje, onda će kupac robe (dužnik) svoj dug, po isteku roka dospeća menice, isplatiti indosatoru, umesto prodavcu (poveriocu, remitentu).
Vrednost koju banka (ili neki drugi kupac menice) isplaćuje za eskontovanu menicu nazivamo **diskontovana vrednost menice**, koja je od nominalne vrednosti manja za kamatu (eskont) računatu za vreme koje protekne od dana eskontovanja do dana dospeća menice. Eskont je najveći ako je menica eskontovana na dan njenog izdavanja, a smanjuje se sa smanjenjem broja dana koji preostaju do dana dospeća menice.

Reeskontovati menicu, znači eskontovati već eskontovanu menicu. Obično poslovne banke eskontuju menice svojih komitenata, a nacionalne banke reeskontuju menice poslovnih banaka.

Prema zakonu o menici dužnik treba da isplati menični iznos najkasnije dva dana po dospeću menice ili da drugačije reguliše svoju obavezu. Jedan od načina regulisanja menične obaveze je **prolongacija duga** izdavanjem nove menice. Ukoliko dug nije regulisan u pomenutom roku, vrši se protest menice kod nadležnog suda.

Pored eskonta u poslovanju sa menicama mogu se obračunavati provizija i troškovi. Usvojimo da se provizija računa procentnim (promilnim) računom od nominalne vrednosti menice kao čiste glavnice, a troškovi u fiksnom novčanom iznosu.

Visoka inflacija je uverila ljude koji se u praksi bave menicama da je potrebno nominalnu vrednost menice tretirati kao uvećanu glavnicu pri izračunavanju eskonta, tako da je i Sporazumom banaka o politici kamatnih stopa predviđen složeni kamatni račun "više sto" kod obračuna eskonta prilikom eskontovanja menica.

Usvojimo sledeće oznake:

NV je oznaka za nominalnu vrednost menice (menični iznos);

VMP je oznaka za vrednost meničnog posla (fakturna vrednost robe ili usluge);
DV je oznaka za diskontovanu vrednost menice;
Ê je oznaka za ukupnu kamatu sadržanu u nominalnoj vrednosti menice;
E je oznaka za iznos eskonta koji banka (ili neki drugi kupac menice) odbija od nominalne vrednosti menice pri eskontovanju menice;
Ê–E je oznaka za deo eskonta koji ostaje imaocu menice;
$\hat{d}$ je oznaka za broj dana koji protekne od dana izdavanja do dana dospeća menice;
d je oznaka za broj dana koji protekne od dana eskontovanja do dana dospeća menice;
$\hat{d}-d$ je oznaka za broj dana koji protekne od dana izdavanja do dana eskontovanja menice;
p je oznaka za eskontnu stopu (godišnju).

Ako je $\hat{d}=d$, onda je Ê = E i VMP = DV.

Koristeći obrasce iz složenog kamatnog računa dobijemo sledeće formule za obračun eskonta pri eskontovanju menica i utvrđivanje veza između nominalne vrednosti menice, vrednosti meničnog posla i diskontovane vrednosti menice:

$$NV = VMP\,(1+p)^{\hat{d}/dg} \qquad \textbf{(49)}$$

$$VMP = NV(1+p)^{-\hat{d}/dg} \qquad \textbf{(49a)}$$

$$DV = VMP(1+p)^{(\hat{d}-d)/dg} \qquad \textbf{(50)}$$

$$VMP = DV(1+p)^{(d-\hat{d})/dg} \qquad \textbf{(50a)}$$

Deljenjem (49) sa (50) dobije se:

$$NV/DV = (1+p)^{d/dg} \sim NV = DV\,(1+p)^{d/dg} \qquad \textbf{(51)}$$

$$DV = NV \cdot (1+p)^{-d/dg} \qquad \textbf{(51a)}$$

$$\hat{E} = NV - VMP \qquad \textbf{(52)}$$

Zamenom (49) u (52) dobije se:

$$\hat{E} = VMP \cdot ((1+p)^{\hat{d}/dg} - 1) \qquad \textbf{(52a)}$$

Zamenom (49a) u (52) dobije se:

$$\hat{E} = NV \cdot \left(1-(1+p)^{-\hat{d}/dg}\right) \qquad \textbf{(52b)}$$

$$E = NV - DV \qquad \textbf{(53)}$$

Zamenom (51) u (53) se dobije:

$$E = DV \cdot \left((1+p)^{d/dg} - 1\right) \qquad \textbf{(53a)}$$

Zamenom (51a) u (53) se dobije:

$$E = NV \cdot \left(1-(1+p)^{-d/dg}\right) \qquad \textbf{(53b)}$$

$$\hat{E} - E = DV - VMP \qquad \textbf{(54)}$$

$$\hat{E} - E = VMP \cdot \left((1+p)^{(\hat{d}-d)/dg} - 1 \right) \tag{54a}$$

$$\hat{E} - E = DV \cdot \left(1 - (1+p)^{(d-\hat{d})/dg} \right) \tag{54b}$$

U formulama u kojima se javlja *NV*, radi pojednostavljenja, se pod *NV* podrazumeva menični iznos umanjen za proviziju i troškove, ako ih ima.

4. KAMAĆENJE I DISKONTOVANJE VIŠEKRATNIH PERIODIČNIH PLAĆANJA

Pod periodičnim plaćanjem podrazumevamo plaćanja (uplate i isplate) izvršena u jednakim vremenskim razmacima, u jednakim iznosima ili iznosima među kojima postoji jedinstvena matematička veza (funkcionalna zavisnost) koja omogućuje njihovo kamaćenje i diskontovanje jednom jedinstvenom formulom, a ne samo pojedinačno kao kod sporadičnih jednokratnih plaćanja koja se javljaju u nepravilno različitim iznosima ili u različitim vremenskim razmacima.

Kao periodična plaćanja se najčešće javljaju ulozi, rente i anuiteti, a među njima najviše anuiteti, pa ćemo zbog toga njima posvetiti posebno poglavlje. Kada je reč o veličini, najčešće susrećemo periodično jednaka plaćanja, a ređe takva, koja rastu ili opadaju prema nekoj od matematičkih zakonitosti poput aritmetičkih i geometrijskih progresija. Periodika plaćanja ne mora da se poklapa sa periodikom kapitalisanja. U praksi susrećemo i takva, a naročito plaćanja koja se vrše češće od kapitalisanja.

Zavisno od praktične potrebe periodična plaćanja se kamate ili diskontuju u svrhu iznalaženja zbira njihovih ukamaćenih ili diskontovanih vrednosti.

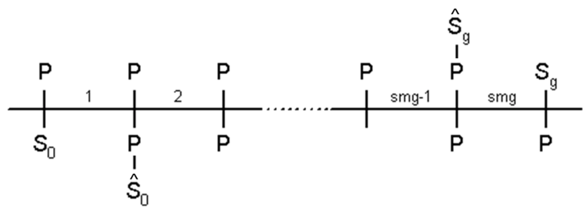
Problematika periodičnih plaćanja je tema za čitavu knjigu, ali s obzirom na značaj u praksi ovom prilikom prikazujemo (pored posebne teme o anuitetima) samo formiranje sume ukamaćenih i sume diskontovanih vrednosti periodično jednakih plaćanja, pri čemu se periodika plaćanja poklapa sa periodikom kapitalisanja ili su plaćanja češća od kapitalisanja, podrazumevajući primenu konformne kamatne stope.

Usvojimo sledeće oznake:

- **P** je oznaka za periodična plaćanja, koja između ostalog mogu biti: ulozi U, rente R i anuiteti A. Ulozi su plaćanja koja periodično deponujemo u svrhu raspolaganja određenog iznosa novca po isteku nekog vremenskog perioda. Rente su plaćanja koja ulagač jednokratnog iznosa (mize) prima po osnovu uloženog iznosa. Anuiteti su plaćanja koja zajmoprimalac periodično plaća u svrhu otplate duga.
- **s** je oznaka za broj periodičnih plaćanja u jednom periodu kapitalisanja i poklapa se sa brojem obračuna kamate koja se želi izvršiti sa konformnom kamatnom stopom u jednom periodu datog kapitalisanja.
- $\mathbf{S_g}$ je oznaka za sumu ukamaćenih vrednosti periodičnih plaćanja P (najčešće uloga U) formiranu jedan period posle poslednjeg plaćanja.
- $\mathbf{S_o}$ je oznaka za sumu diskontovanih vrednosti periodičnih plaćanja (najčešće rente R) formiranu jedan period pre prvog plaćanja.

Prikazaćemo na vremenskoj liniji odnos smg plaćanja u g godina i stanja S_g odnosno S_0 (Slika 3).

Slika 3



Na osnovu pretpostavki i usvojenih oznaka dobijamo (počevši od poslednjeg plaćanja)

$$S_g = P(1+p/m)^{1/s} + P(1+p/m)^{2/s} + \dots + P(1+p/m)^{smg/s}$$

Sabirci u izrazu na desnoj strani ove jednakosti predstavljaju članove geometrijskog niza, u kome je prvi član $P(1+p/m)^{1/s}$, a količnik $(1+p/m)^{1/s}$.

Izračunati S_g znači naći zbir prvih smg članova pomenutog niza, pa će dalje biti:

$$S_g = P(1+p/m)^{1/s} \cdot \frac{((1+p/m)^{1/s})^{smg} - 1}{(1+p/m)^{1/s} - 1}$$

odnosno:

$$S_g = P \cdot \frac{(1+p/m)^{mg} - 1}{1-(1+p/m)^{-1/s}} \qquad \textbf{(55)}$$

Ređe je u upotrebi suma ukamaćenih vrednosti periodičnih plaćanja koja se formira na dan poslednjeg plaćanja tj:

$$\hat{S}_g = S_g(1+p/m)^{-1/s} = P\,\frac{(1+p/m)^{mg} - 1}{(1+p/m)^{1/s} - 1} \qquad \textbf{(56)}$$

na sličan način dobijamo:

$$S_o = P(1+p/m)^{-1/s} + P(1+p/m)^{-2/s} + \dots + P(1+p/m)^{-smg/s}.$$

$$S_o = P(1+p/m)^{-1/s} \cdot \frac{((1+p/m)^{-1/s})^{smg} - 1}{(1+p/m)^{-1/s} - 1}$$

$$S_o = P \cdot \frac{1-(1+p/m)^{-mg}}{(1+p/m)^{1/s} - 1} \qquad \textbf{(57)}$$

Ređe je u upotrebi suma diskontovanih vrednosti periodičnih plaćanja koja se formira na dan prvog plaćanja, tj.:

$$\hat{S}_o = S_o(1+p/m)^{1/s} = P \cdot \frac{1-(1+p/m)^{-mg}}{1-(1+p/m)^{-1/s}} \qquad \textbf{(58)}$$

Za slučaj kontinuelnog kapitalisanja važi:

$$S_g = P \cdot \frac{e^{np_N} - 1}{1 - e^{\frac{-p_N}{s}}} \qquad \textbf{(59)}$$

pri čemu je s oznaka za broj periodičnih plaćanja u jednom periodu za koji važi nominalna (data) stopa p_N.

$$S_o = P \cdot \frac{1-e^{-np_N}}{e^{p_N/s}-1} \tag{50}$$

za p_N=p i n=g biće:

$$S_g = P \cdot \frac{e^{pg}-1}{1-e^{-p/s}} \tag{61}$$

$$S_o = P \cdot \frac{1-e^{-pg}}{e^{p/s}-1} \tag{62}$$

Po potrebi se iz (55) ako je poznato S_g može izračunati P, ovako:

$$P = S_g \cdot \frac{1-(1+p/m)^{-1/s}}{(1+p/m)^{mg}-1} \tag{55a}$$

Na isti način se P može dobiti i iz ostalih jednačina (56) do (62).

Polazeći od objašnjenih simbola (oznaka) ***g***, ***m***, i ***s*** zaključujemo sledeće:

- Za jedno plaćanje godišnje, tj. za *g* plaćanja u *g* godina (*m=1*, *s=1*), obračun kamata se vrši sa kamatnom stopom *p*.
- Za *m* plaćanja u jednoj godini, tj. za *mg* plaćanja u *g* godina (*s=1*), obračun kamata se vrši sa kamatnom stopom $\frac{p}{m}$.
- Za *s* plaćanja u jednom periodu kapitalisanja, tj. za *sm* plaćanja u jednoj godini, odnosno za *smg* plaćanja u *g* godina, obračun kamata se vrši kamatnom stopom $p_c = \left(1+\frac{p}{m}\right)^{\frac{1}{s}} - 1$.

U praksi se retko pojavljuje potreba da se izračuna broj perioda odnosno broj periodičnih plaćanja. Ako je to ipak potrebno može se iz npr. (55) dobiti sledećim postupkom:

$$\frac{\left(1+\frac{p}{m}\right)^{mg}-1}{1-\left(1+\frac{p}{m}\right)^{-\frac{1}{s}}} = \frac{S_g}{P}$$

$$\left(1+\frac{p}{m}\right)^{mg} = 1+\left(1-\left(1+\frac{p}{m}\right)^{-\frac{1}{s}}\right)\cdot\left(\frac{S_g}{P}\right)$$

$$mg\ln\left(1+\frac{p}{m}\right) = \ln\left(1+\left(1-\left(1+\frac{p}{m}\right)^{-\frac{1}{s}}\right)\cdot\left(\frac{S_g}{P}\right)\right)$$

$$mg = \frac{\ln\left(1+\left(1-\left(1+\frac{p}{m}\right)^{-\frac{1}{s}}\right)\cdot\left(\frac{S_g}{P}\right)\right)}{\ln\left(1+\frac{p}{m}\right)} \qquad \textbf{(55b)}$$

Iz (59) dobijemo:

$$e^{np_N} = 1+\left(1-e^{-\frac{p_N}{s}}\right)\frac{S_g}{P}$$

$$n = \frac{1}{p_N}\cdot\ln\left(1+\left(1-e^{-\frac{p_N}{s}}\right)\frac{S_g}{P}\right) \qquad \textbf{(59b)}$$

Na sličan način se vrši transformacija i ostalih jednačina.

U problemima ovakve vrste se retko pojavljuje i potreba za izračunavanjem kamatne stope. Ako je to ipak potrebno problem se ne može rešiti eksplicitnim izračunavanjem **p**, ali se može rešiti metodima približnog rešavanja algebarskih jednačina višeg stepena, npr. iterativnim metodom. Suštinu ovog metoda čini postupno (iterativno) zamenjivanje numeričkih vrednosti umesto **p** takvih da razlika leve i desne strane jednačine teži nuli. Korišćenjem kompjuterske tehnike ovaj problem se rešava sa željenom preciznošću i brzo.

5. AMORTIZACIJA ZAJMOVA

Zadatak finansijske matematike je kvantitativna analiza otplate (amortizacije) zajmova, uz napomenu da se zajmovi koji imaju specifičan karakter (kao npr. zajmovi podeljeni na obveznice) obrađuju posebno.

Zajam može biti vraćen jednokratno u celosti, pa se u tom slučaju primenjuje obračun prikazan u poglavlju o kamaćenju i diskontovanju jednokratnih plaćanja. U ovom poglavlju ćemo razmatrati slučaj amortizacije (otplate) postepeno, višekratnim iznosima koji se nazivaju rate ili anuiteti, a mogu biti jednaki ili različiti. Ako su različiti, onda anuiteti mogu da se menjaju prema nekom od matematičkih zakona (npr. prema aritmetičkoj ili geometrijskoj progresiji), a mogu biti različiti bez određene pravilnosti među njima.

Polazeći od pretpostavke da pozajmljivanje i vraćanje duga podrazumeva i plaćanje kamate od strane dužnika, anuitet treba da sadrži i kamatu na dug koji prestaje nakon plaćanja prethodnog anuiteta i deo za koji se smanjuje dug u posmatranom periodu (ovaj deo se obično naziva otplata). Prema tome važi:

$$A_j = I_j + B_j \qquad \textbf{(60)}$$

- A_j je oznaka za anuitet u j–tom periodu;
- I_j je oznaka za kamatu u j–tom periodu;
- B_j je oznaka za otplatu u j–tom periodu.

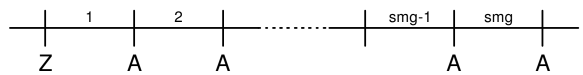
Pored ovih oznaka koristiće se i sledeće:

- Z je oznaka za zajam,
- O je oznaka za otplaćeni deo duga,
- D je oznaka za dug (ostatak duga).

5.1. Anuiteti jednaki

Pretpostavimo da se plaćanje anuiteta vrši u momentu obračuna kamate relativnom ili konformnom stopom na kraju perioda kao na sledećoj vremenskoj liniji (Slika 4):

Slika 4



- **s** je oznaka za broj anuiteta u jednom periodu datog kapitalisanja i istovremeno broj perioda u kojima se vrši obračun kamate konformnom kamatnom stopom.

Poštujući osnovne principe finansijske matematike zajam Z mora biti suma diskontovanih vrednosti budućih anuiteta, tj.

$$Z = A(1+p/m)^{-1/s} + A(1+p/m)^{-2/s} + \ldots + A(1+p/m)^{-smg/s},$$

odnosno:

$$Z = A \cdot \frac{1-(1+p/m)^{-mg}}{(1+p/m)^{1/s}-1} \qquad \textbf{(61)}$$

odnosno:

$$Z = A \cdot \frac{1-(1+p/m)^{-mg}}{p_c} = A \cdot \frac{1-(1+p_c)^{-smg}}{p_c} \qquad \textbf{(61a)}$$

pri čemu je:

$$p_c = (1+p/m)^{1/s} - 1 \sim 1 + p_c = (1+p/m)^{1/s}$$

Za $s=1$, važi:

$$Z = A \cdot \frac{1-(1+p/m)^{-mg}}{p/m} \qquad \textbf{(62)}$$

Za $m=1$ i $s=1$ važi:

$$Z = (A/p)(1-(1+p)^{-g}) \qquad \textbf{(63)}$$

Ako je data kamatna stopa p_N (koja ne mora biti godišnja) i odgovarajući broj perioda n, a nije eksplicitno rečeno kakvo je kapitalisanje, onda važi:

$$Z = A \cdot \frac{1-(1+p_N)^{-n}}{p_N} \qquad \textbf{(64)}$$

Ako se u jednom periodu za koji važi p_N plaća s anuiteta, onda važi:

$$Z = A \cdot \frac{1-(1+p_N)^{-n}}{(1+p_N)^{1/s}-1} \qquad \textbf{(65)}$$

Za $s=1$ od (64) se dobije (65).

Sada raspolažemo sa dovoljno elemenata da postavimo sledeći zadatak:

Primer 10.

Zajam od Z din treba otplatiti za g godina uz kamatnu stopu p i m kapitalisanja godišnje sa s anuiteta u jednom periodu kapitalisanja. Izraditi plan amortizacije, kontrolisati ga i utvrditi veze između veličina u planu amortizacije.

☞ **Rešenje:**

I Izrada plana amortizacije

Opšti zadatak podrazumeva da su veličine Z, g, p, m i s date, pa da bi se pristupilo izradi plana amortizacije treba izračunati A. Ovo se može uraditi transformacijom (62), (63) i (64) iz kojih se dobije:

$$A = Z \cdot \frac{(1+p/m)^{1/s}-1}{1-(1+p/m)^{-mg}} \tag{61a}$$

ili

$$A = \frac{Z \cdot p_c}{1-(1+p/m)^{-mg}} = A \cdot \frac{Z \cdot p_c}{1-(1+p_c)^{-smg}} \tag{61b}$$

odnosno:

$$A = Z \cdot \frac{p/m}{1-(1+p/m)^{-mg}} \tag{62a}$$

odnosno:

$$A = Z \cdot (p/(1-(1+p)^{-g})) \tag{63a}$$

Opšti plan amortizacije prikazujemo u Tabeli 1.

Tabela 1

j	D_{j-1}	$I_j=p_c \cdot D_{j-1}$, $p_c=(1+p/m)^{1/s}-1$	$B_j = A - I_j$
1	$D_0=Z$	$I_1=p_c \cdot D_0 = p_c \cdot Z$	$B_1=A-I_1$
2	$D_1=D_0-B_1=Z-O_1$	$I_2 = p_c \cdot D_1$	$B_2 = A - I_2$
3	$D_2=D_1-B_2=Z-O_2$	$I_3 = p_c \cdot D_2$	$B_3 = A - I_3$
...	...	...	...
k		$I_k = P_c \cdot D_{k-1}$	$B_k = A - I_k$
k+1	$D_k = D_{k-1} - B_k = Z - O_k$		
...	...	...	...
smg	$D_{smg-1} = D_{smg-2}-B_{smg-1}=Z-O_{smg-1}$	$I_{smg} = p_c \cdot D_{smg-1}$	$B_{smg} = A - I_{smg}$
Σ	$\sum_{j=1}^{smg} D_{j-1}$	$\sum_{j=1}^{smg} I_j = p_c \sum_{j=1}^{smg} D_{j-1}$	$\sum_{j=1}^{smg} B_j = Z$

Primer 11.

Zajam od 30.000 din. treba otplatiti za 5 meseci jednakim mesečnim anuitetima, uz polugodišnje kapitalisanje i 18% kamate godišnje.

☞ **Rešenje:** (Tabela 2)

Z = 30.000; g = 5/12; m=2; s=6; p=0,18

$$A = 30.000 \cdot \frac{1{,}09^{1/6}-1}{1-1{,}09^{-2 \cdot 5/12}} = 6.262{,}89$$

Tabela 2

j	D_{j-1}	$I_j=p_c \cdot D_{j-1}$	$B_j = A - I_j$

1	30000,00	434,00	5828,89
2	24171,11	349,67	5913,22
3	18257,89	264,13	5998,76
4	12259,13	177,35	6085,54
5	6173,58	89,31	6173,59
∑	90861,71	1314,46	30000,00

$p_c = 1{,}09^{1/6} - 1 = 0{,}014466592$; A = 6.282,89

Primer 12.

Zajam od 30.000 din. treba otplatiti za 5 meseci jednakim mesečnim anuitetima, uz 8% kamate mesečno.

☛ **Rešenje:** (Tabela 3)

Pošto učestalost kapitalisanja nije definisana, problem možemo rešiti pomoću jednačine (5) ovako:

$Z = 30.000$; $p_N = p_M = 0{,}08$; $n = M = 5$;

$$A = Z \cdot \frac{p_M}{1-(1+p_M)^{-M}} = 30.000 \cdot \frac{0{,}08}{1-1{,}08^{-5}} = = 7.513{,}69$$

ili pomoću (6) ovako:

$Z = 30.000$; $p_N = p_M = 0{,}08$; $n = M = 5$; $s=1$.

a može i pomoću (2a) ako se pretpostavi mesečno kapitalisanje, ovako:

$Z = 30.000$; $g=5/12$; $m = 12$; $s=1$; $p/m = p_M = 0{,}08$

$$A = 30.000 \cdot \frac{0{,}08^{1/1} - 1}{1-1{,}08^{-12 \cdot 5/12}}$$

Tabela 3

j	D_{j-1}	$I_j = 0{,}08 \cdot D_{j-1}$	$B_j = A - I_j$
1	30.000,00	2.400,00	5.113,69
2	24.886,31	1.990,90	5.522,79
3	19.363,52	1.549,08	5.964,61
4	13.398,90	1.071,91	6.441,78
5	6.957,12	556,57	6.957,13
∑	94.605,85	7.568,46	30.000,00

$p_c = 0{,}08$; A = 7.513,69

U praksi se zbog jednostavnijeg prikaza često postupa i ovako: objedini se zajam i ukupna kamata, pa se od tako objedinjenog duga oduzme anuitet da bi se dobilo stanje duga (zajedno sa kamatom). Ovo se ponavlja iz perioda u period dok se ne dobije da je stanje duga nula.

Primer 13.

Neka je u 12. primeru određeno da anuiteti dospevaju svakog 10. u mesecu počev od 10.7.2008. Tada plan otplaćivanja može izgledati ovako (Tabela 4):

Tabela 4

Redni broj anuiteta	**Dan dospeća anuiteta**	**Anuitet**	**Stanje duga**
1	10.07.2000.	7.513,69	30.054,77
2	10.08.2000.	7.513,69	22.541,08
3	10.09.2000.	7.513,69	15.027,39

4	10.10.2000.	7.513,69	7.513,70
5	10.11.2000.	7.513,69	0

$$Z + \sum I = 5 \cdot A = 37.568,46;$$
$$A = 7.513,69$$

Problemi u ovom slučaju nastaju ako dužnik izrazi želju da preostali dug isplati u celosti pre roka dospeća poslednjeg anuiteta. Pretpostavimo da u ovom primeru dužnik hoće da isplati preostali dug na dan 1.9.2008. godine. Znači dužnik na dan 1.9.2008. treba da plati, treći, četvrti i peti anuitet diskontovano na dan 1.9. tj.

$$D = (7.513,69 + 7.513,69 \cdot 1,08^{-1} + 7.513,70 \cdot 1,08^{-2}) \cdot 1,08^{-9/31}.$$

D = 20450,52 din dužnik treba da plati na dan 1.9.2008. da bi preostali dug platio u celosti.

Do istog rezultata možemo doći ako ostatak duga posle drugog plaćenog anuiteta (Tabela 3) u iznosu od 19363,52 din ukamatimo i svedemo na dan 1.9.2008. (sa 10.8.2008.), tj. biće:

$$D = 19.363,52 \cdot 1,08^{22/31} = 20.450,52 \text{ din.}$$

Primetimo da je u prvom načinu upotrebljeno –9/31 iako se radi o 9 dana iz septembra, koji ima 30 dana. Ovako je urađeno zbog toga što smo za obračunski mesec, u kome važi mesečna stopa, uzeli period od 10.8.2008. do 10.9.2008. a u tom periodu ima 31 dan. Da je uzeto da je obračunski mesec period od prvog do zadnjeg dana u mesecu onda se ne bi dobio isti rezultat na oba načina.

Ako dužnik želi preostali dug platiti na dan 10.9.2008. onda treba da plati dospeli anuitet za taj dan u iznosu od 7513,69 plus dug koji proističe iz poslednja dva anuiteta koji dospevaju za plaćanje 10.10. i 10.11. (pazi to nije jednako stanju duga u poslednjoj koloni koja glasi na iznos od 15.027,39 din.) tj.

$$D = 7.513,69 + 7.513,69 \cdot 1,08^{-1} + 7.513,70 \cdot 1,08^{-2} = 20.912,60 \text{ din.}$$

II Kontrole plana amortizacije

Iz opšteg plana amortizacije i prikazanih konkretnih slučaja možemo zaključiti da je plan ispravan ako važi sledeće:

1) Poslednja otplata mora biti jednaka poslednjom ostatku duga, odnosno ostatku duga na početku poslednjeg perioda nakon smg–1 plaćenih anuiteta, tj.

$$B_{smg} = D_{smg-1} \tag{66}$$

2) Zbir svih otplata mora biti jednak zajmu, tj.

$$\sum_{j=1}^{smg} B_j = Z \tag{67}$$

3) Zbir ukupne kamate i ukupnog iznosa otplata mora biti jednak zbiru svih anuiteta, tj.

$$\sum_{j=1}^{smg} I_j + \sum_{j=1}^{smg} B_j = smgA \tag{68}$$

Obrasci (67) i (68) omogućuju izračunavanje ukupne kamate i bez izrade plana amortizacije, tj.:

$$\sum_{j=1}^{smg} I_j = smg\,A - Z$$

(69)

4) Kamata na zbir kolone ostataka duga (D_{j-1}), računato za 1 period, mora biti jednaka ukupnoj kamati, tj.

$$p_c \sum_{j=1}^{smg} D_{j-1} = \sum_{j=1}^{smg} I_j$$

(70)

III Veze između veličina u planu amortizacije

Između veličina u planu amortizacije i vezanih za plan amortizacije, postoje funkcionalne veze tako da se pomoću njih može izračunati željena veličina, polazeći od ostalih datih podataka, i bez izrade plana amortizacije. Može se slobodno reći da već i obrasci (10) do (11) predstavljaju deo takvih funkcionalnih veza. Za formiranje ostalih pođimo od:

$$I_k = ((1+p/m)^{1/s}-1)\ D_{k-1} = p_c \cdot D_{k-1}$$

(71)

pri čemu je D_k=Z, a

$$D_k = A \cdot \frac{1-(1+p/m)^{-(smg-k)/s}}{(1+p/m)^{1/s}-1}$$

(72)

odnosno:

$$D_k = A \cdot \frac{1-(1+p_c)^{-(smg-k)}}{p_c}$$

(72a)

D_k je oznaka za ostatak duga posle prvih k plaćenih anuiteta i predstavlja zbir diskontovanih vrednosti (smg–k) neplaćenih anuiteta na početku (k+1)–vog perioda, tj.

$$D_k = A_{k+1} \cdot (1+p/m)^{-1/s} + A_{k+2} \cdot (1+p/m)^{-2/s} + \ldots + A_{smg}(1+p/m)^{-(smg-k)/s}$$

(72')

pa smo (72) dobili istim postupkom kojim smo dobili (61) ili zamenom u (61) smg–k umesto smg.

Dalje, pošto je $A=B_j+I_j$, biće:

$$B_k = A - I_k,$$

$$B_k = A - p_c \cdot D_{k-1},$$

$$B_k = A - p_c \cdot A\ \frac{1-(1+p_c)^{-(smg-(k-1))}}{p_c}$$

$$B_k = A \cdot (1+p_c)^{-(smg+1-k)}$$

(73)

odnosno:

$$B_k = A \cdot (1+p/m)^{-(smg+1-k)/s}$$

(73a)

Tako smo uspostavili direktnu vezu između bilo koje otplate i anuiteta, koja se po potrebi može pisati i ovako:

$$A = B_k\ (1+p/m)^{-(smg+1-k)/s}$$

(74)

odnosno:

$$A = B_k\ (1+p_c)^{smg+1-k}$$

(74a)

Prema (73) važi i ova jednačina:

$$B_L = A \cdot (1+ p_c)^{-(smg+1-L)}$$

(75)

odnosno:

$$B_L = A(1+ p/m)^{-(smg+1-L)/s} \tag{75a}$$

Deljenjem (75) sa (73) dobije se:

$$B_L/B_k = (1+p_c)^{L-k} \sim B_L = B_k(1+p_c)^{L-k} \tag{76}$$

odnosno:

$$B_L = B_k(1+p/m)^{(L-k)/s} \tag{76a}$$

(76) odnosno (76a) su veze između bilo koje dve otplate.

Iz (75a) zaključujemo da važi redom:

$$B_1 = A(1+p/m)^{-smg/s},$$

$$B_2 = A(1+p/m)^{-(smg-1)/s}, \ldots, B_k = A \cdot (1+p/m)^{-(smg+1-k)/s},$$

$$B_{k+1} = A(1+p/m)^{-(smg-k)/s}, \ldots, B_{smg} = A \cdot (1+p/m)^{-1/s}$$

Upoređujući ovaj niz sa (72') zaključujemo da važi:

$D_k = B_{k+1}+B_{k+2}+\ldots+B_{smg}$, tj. da je D_k ostatak duga koji predstavlja zbir neplaćenih smg–k otplata.

Dalje zaključujemo da važi:

$$O_k = B_1 + B_2 + \ldots + B_k,$$

tj.:

$$O_k = A(1+p/m)^{-mg} \cdot \frac{(1+p/m)^{k/s}-1}{(1+p/m)^{1/s}-1} \tag{77}$$

odnosno:

$$O_k = A(1+p_c)^{-smg} \cdot \frac{(1+p_c)^k-1}{p_c} \tag{77a}$$

Korišćenjem (75) i (75a) može se pisati i ovako:

$$O_k = B_1 \cdot \frac{(1+p/m)^{k/s}-1}{(1+p/m)^{1/s}-1} \tag{78}$$

odnosno:

$$O_k = B_1 \cdot \frac{(1+p_c)^k-1}{p_c} \tag{78a}$$

pri čemu je:

$$O_{smg} = \sum_{j=1}^{smg} B_j = Z, \qquad O_k + D_k = Z$$

Primer 14.

Zajam od 100.000 din. treba otplatiti za 3 godine mesečnim jednakim anuitetima uz 18% kamate godišnje i godišnje kapitalisanje.

Odrediti:
a) 13. otplatu;
b) 28. otplatu;

c) otplaćeni deo duga u prvih pola godine;
d) deo duga koji se može otplatiti sa drugih šest anuiteta;
e) ukupnu kamatu i
f) izraditi plan amortizacije za poslednja tri meseca.

☞ **Rešenje:**

Z = 100.000; g= 3; m = 1; s= 12; p=0,18

a) $A = 100.000 \cdot \dfrac{1{,}18^{1/12}-1}{1-1{,}18^{-3}} = 3.548{,}68$ din.

$B_{13} = A \cdot 1{,}18^{-24/12} = 2.548{,}61$ din.

b) $B_{28} = A \cdot 1{,}18^{-9/12} = B_{13} \cdot 1{,}18^{15/12} = 3.134{,}40$ din.

c) $O_6 = A \cdot 1{,}18^{-3} \cdot \dfrac{1{,}18^{6/12}-1}{1{,}18^{1/12}-1} = 13.417{,}38$ din.

d) $O_{12} = A \cdot 1{,}18^{-3} \cdot \dfrac{1{,}18^{12/12}-1}{1{,}18^{1/12}-1} = 27.992{,}39$ din. je otplaćeni deo duga sa prvih 12 anuiteta.

$O_{12} - O_6 = 14.575{,}01$ din je deo duga koji se može otplatiti anuitetima od sedmog do dvanaestog, tj. sa drugih 6 anuiteta.

e) $\sum_{j=1}^{36} I_j = 36 \cdot A - Z = 27.752{,}41$ din.

f) Za izradu dela plana amortizacije za poslednja tri meseca (vidi Tab. 10-11) potrebno je izračunati ostatak duga posle 33 plaćena anuiteta, tj.

$D_{33} = A \cdot \dfrac{1-1{,}18^{-3/12}}{1{,}18^{1/12}-1}$ 10.357,03 din.

j	D_{j-1}	$I_j = p_c \cdot D_{j-1}$	$Bj = A - I_j$
34	10.357,03	143,84	3.404,84
35	6.952,19	96,56	3.452,12
36	3.500,07	48,61	3.500,07

$p_c = 1{,}18^{-1/12} - 1 = 0{,}01388843$; A = 3.548,68

Za slučaj da je nepoznat broj anuiteta ili kamatna stopa važi ono što je rečeno da važi za periodična plaćanja uopšte, uz napomenu da pojmovi vreme amortizacije i broj anuiteta nisu isto, ali se broj anuiteta određuje iz prethodno određenog vremena amortizacije.

Pri određivanju broja anuiteta dat je zajam i dat je anuitet, pa mogu nastupiti sledeća dva slučaja:

1) izračunamo vreme amortizacije $(smg)_t$ i za rezultat dobijemo ceo, prirodni broj. Ovaj broj je ujedno i broj anuiteta pa se radi o već prikazanom slučaju jednakih anuiteta.
2) Izračunamo vreme amortizacije $(smg)_t$ i za rezultat dobijemo broj koji nije ceo, tj. $smg-1<(smg)_t<smg$, pri čemu je $smg - 1 = [(smg)_t]$, dok je $smg = [(smg)_t]+1$.

U ovom slučaju kažemo da će dužnik platiti smg–1 datih anuiteta A dok će poslednji smg–ti put platiti tzv. anuitetni ostatak $A_o<A$. Anuitetni ostatak A_o može biti i posledica izvršenog zaokrugljivanja anuiteta.

Zaokrugljivanje anuiteta može da se vrši u okviru datog broja anuiteta ili proizvoljno pa se broj anuiteta određuje kao posledica proizvoljno određenih anuiteta.

Primer 15.

Zajam od 100.000 din. treba otplatiti sa 6 mesečnih anuiteta uz 18% kamate mesečno. Dobijeni anuitet zaokružiti na:

a) najmanju moguću celu hiljadu;
b) najveću moguću celu hiljadu;
c) najmanju celu stotinu;

d) najveću celu stotinu;
e) najveću celu desetinu hiljada.

☞ **Rešenje:**

U problemima ove vrste zaokrugljeni anuitet se određuje ovako:

$$A_{min} \leq A < A_{max} \tag{79}$$

pri čemu je:

$$A_{min} = Z(smg) = Z \cdot \frac{(1+p/m)^{1/s} - 1}{1-(1+p/m)^{-mg}} \tag{80}$$

$$A_{max} = Z(smg-1) = Z \cdot \frac{(1+p/m)^{1/s} - 1}{1-(1+p/m)^{-(smg-1)/s}} \tag{81}$$

U datom primeru će biti:

Z = 100.000; g=1/2; m=12; s=1

$A_{min} = 100.000 \cdot \dfrac{0{,}18}{1-1{,}18^{-6}}$ 28.591,01 je mesečni anuitet kojim se dati zajam može otplatiti za šest meseci.

$A_{max} = 100.000 \cdot \dfrac{0{,}18}{1-1{,}18^{-5}} = 31.977{,}78$ din je mesečni anuitet kojim se dati zajam može otplatiti za pet meseci.

a) A = 29.000 din, što znači da će se dati zajam otplatiti sa pet anuiteta od po 29.000 din. i šestim koji će biti manji od 29.000, tj. $A_o < 29.000$
b) A = 31.000 din;
c) A = 28.600 din;
d) A = 31.900 din;
e) A = 30.000 din.

Dužnik i poverilac se mogu dogovoriti da se anuitet zaokruži npr. na 32.000 din, ali tada šesti anuitet nije potreban; ili da se zaokruži na 28.000 din pa će poslednji anuitet biti veći od 28.000 din, tj. biće $A_0 > A$. Ove varijante su više za tačku 5.2.4.

Primer 16.

Zajam od 100.000 din treba otplaćivati mesečnim anuitetima koji iznosi 30% od zajma uz 18% kamate mesečno. Izračunati koliko anuiteta treba platiti?

☞ **Rešenje:**

Iz (61a) dobijemo:

$$(smg)_t = -\frac{\ln\left(1-\frac{Z}{A}\cdot p_c\right)}{\ln(1+p_c)} \tag{82}$$

Konkretno će biti:

$$(smg)_t = -\frac{\ln\left(1-\frac{100.000\cdot 0{,}18}{30.000}\right)}{\ln 1{,}18} = 5{,}536 \text{ meseci}$$

odnosno:

$5 < (smg)_t < 6$,

što znači da treba platiti 5 anuiteta po 30.000 din, a jedan (šesti) će biti $A_o < 30.000$.

5.2. Anuiteti različiti

Napred je rečeno da se zajam može otplatiti odjednom (jednokratno) po isteku dogovorenog perioda ili višekratno anuitetima koji mogu biti jednaki ili različiti, plaćati se u jednakim ili različitim vremenskim razmacima.
Ako su anuiteti različiti onda mogu biti:

a) heterogeno nepravilno različiti bez određene matematičke zakonitosti, u jednakim ili različitim vremenskim razmacima,
b) takvi da se menjaju periodično po nekoj od matematičkih zakona (anuiteti rastu ili opadaju po aritmetičkoj ili geometrijskoj progresiji, otplate jednake ili se menjaju prema aritmetičkoj ili geometrijskoj progresiji i dr.).

5.2.1. Otplate jednake

U ovom slučaju polazimo od pretpostavke:

$$B_1 = B_2 = \dots = B_{smg} = B,$$

pa važi:

$$Z = smgB \sim B = Z/smg \qquad \textbf{(83)}$$

$$O_k = kB = k/smg \cdot Z \qquad \textbf{(84)}$$

$$D_k = Z - O_k = (smg - k) \cdot B = \frac{smg-k}{smg} \cdot Z \qquad \textbf{(85)}$$

$$I_k = p_c D_{k-1} = p_c \cdot Z\,\frac{smg-k+1}{smg} = p_c \cdot B(smg - k + 1) \qquad \textbf{(86)}$$

$$A_k = B + I_k$$

$$A_k = Z \cdot \frac{1+p_c(smg-k+1)}{smg} \qquad \textbf{(87)}$$

$$A_k = B\,(1+p_c(smg-k+1)) \qquad \textbf{(88)}$$

$$\sum_{j=1}^{smg} I_j = I_1+I_2+I_3+I_4+\dots+I_{smg} = p_c \cdot Z + p_c\left(Z-\frac{Z}{smg}\right)+p_c\left(Z-\frac{2Z}{smg}\right)+p_c\left(Z-\frac{3Z}{smg}\right)+\dots+p_c\left(Z-\frac{(smg-1)Z}{smg}\right)=$$

$$= p_c Z\left(1+1-\frac{1}{smg}+1-\frac{2}{smg}+1-\frac{3}{smg}+\dots+1-\frac{smg-1}{smg}\right) = p_c \cdot Z\left(smg-\frac{1}{smg}\cdot(1+2+3+\dots+smg-1)\right)=$$

$$= p_c \cdot Z\left(smg-\frac{1}{smg}\cdot\frac{(smg-1)\cdot smg}{2}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{smg} I_j = p_c \cdot Z \cdot \frac{smg+1}{2} = \frac{smg(smg+1)p_c \cdot B}{2} \qquad \textbf{(89)}$$

$$\sum_{j=1}^{smg} A_j = Z + \sum_{j=1}^{smg} I_j = Z\left(1+p_c\,\frac{smg+1}{2}\right) \qquad \textbf{(90)}$$

Primer 17.

Zajam od 90.000 din treba otplatiti za šest meseci mesečnim anuitetima i jednakim otplatama uz 18% kamate mesečno. Izraditi plan amortizacije.

☛ **Rešenje:** (Tabela 6)

Tabela 6

j	D_{j-1}	$I_j=p_c \cdot D_{j-1}$	$A_j=B+I_j$
1	90.000,00	16.200,00	31.200,00
2	75.000,00	13.500,00	28.500,00
3	60.000,00	10.800,00	25.800,00
4	45.000,00	8.100,00	23.100,00
5	30.000,00	5.400,00	20.400,00
6	15.000,00	2.700,00	17.700,00
Σ	–	**56.700,00**	**146.700,00**

Z=90.000;
B=15.000;
p_c=0,18

Kontrola:

$$Z = \sum_{j=1}^{6} A_j = Z + \sum_{j=1}^{6} I_j = 146.700 - 56.700 = 90.000$$

5.2.2. Anuiteti se menjaju po aritmetičkoj progresiji

Za ovu priliku ćemo pokazati slučaj da se periodika plaćanja anuiteta poklapa sa periodikom obračuna kamate. Bez izvođenja dajemo formule za zajam i anuitet:

$$Z = A_1 \cdot \frac{1-(1+p/m)^{-mg}}{(1+p/m)^{1/s}-1} + \frac{d(1+p/m)^{-mg}}{(1+p/m)^{1/s}-1} \cdot \left(\frac{(1+p/m)^{mg}-1}{(1+p/m)^{1/s}-1} - smg \right) \tag{91}$$

odnosno:

$$A_1 = \left(Z - \frac{d(1+p/m)^{-mg}}{(1+p/m)^{1/s}-1} \cdot \left(\frac{(1+p/m)^{mg}-1}{(1+p/m)^{1/s}-1} - smg \right) \right) \cdot \frac{(1+p/m)^{1/s}-1}{1-(1+p/m)^{-mg}} \tag{92}$$

pri čemu je:

$$A_k = A_1 + (k-1)d = A_{k-1} + d \tag{93}$$

- **d** je oznaka za diferenciju, tj. razliku bilo kog i prethodnog anuiteta.

Primer 18.

Zajam od 100.000 din treba otplatiti za 5 meseci, mesečnim anuitetima koji sukcesivno rastu za 2.000 din, uz 2% kamate mesečno. Izraditi plan otplaćivanja.

☛ **Rešenje:** Tabela 7

Z = 100.000; g=5/12; m=12; s=1; p/m=0,02; d=2.000

$$Z = \left(100.000 - \frac{2.000 \cdot 1{,}02^{-5}}{0{,}02} \cdot \left(\frac{1{,}02^{5}-1}{0{,}02} - 5 \right) \right) \cdot \frac{0{,}02}{1-1{,}02^{-5}}$$

Tabela 7

j	D_{j-1}	$I_j=p_c \cdot D_{j-1}$	$A_j=A_{j-1}+d$	$B_j = A_j - I_j$
1	100.000,00	2.000,00	17.295,04	15.295,04
2	84.704,96	1.694,10	19.295,04	17.600,94
3	67.104,03	1.342,08	21.295,04	19.952,96
4	47.151,07	943,02	23.295,04	22.352,02
5	24.799,06	495,98	25.295,04	24.799,06
Σ	**–**	**6.475,18**	**106.475,20**	**100.000,00**

p_c=0,02
A_1=17.295,04
d=2.000

5.2.3. Anuiteti se menjaju po geometrijskoj progresiji

1. slučaj:

$$q \neq 1 + p_c = (1+p/m)^{1/s}$$

- **q** je oznaka za količnikk bilo kog i prethodnog anuiteta

$$Z = A_1 \cdot \frac{1-(q^s/(1+p/m))^{mg}}{(1+p/m)^{1/s}-q}; \tag{94}$$

$$A_1 = Z \cdot \frac{(1+p/m)^{1/s}-q}{1-(q^s/(1+p/m))^{mg}}; \tag{95}$$

$$A_k = A_1 \cdot q^{k-1} = A_{k-1} \cdot q \tag{96}$$

Primer 19.

Zajam od 100.000 din treba otplatiti za 5 meseci, mesečnim anuitetima koji sukcesivno rastu za 10% u odnosu na prethodni, uz 2% kamate mesečno. Izraditi plan otplaćivanja.

☞ **Rešenje:** (Tabela 8)

Z = 100.000; q=5/12; m=12; s=1; p=0,02; q=1,1

$$A_1 = 10.000 \cdot \frac{1{,}02-1{,}1}{1-(1{,}1:1{,}02)^{-5}} = 17.441{,}03$$

Tabela 8

j	D_{j-1}	$I_j=p_c \cdot D_{j-1}$	$A_j=q \cdot A_{j-1}$	$B_j = A_j - I_j$
1	100.000,00	2.000,00	17.441,03	15.441,03
2	84.558,97	1.691,18	19.185,13	17.493,95
3	67.065,02	1.341,30	21.103,65	19.762,34
4	47.302,67	946,05	23.214,01	22.267,96
5	25.034,72	500,69	25.535,41	25.034,72
Σ	**–**	**6.479,22**	**106.479,23**	**100.000,00**

p_c=0,02;
q=1,1;
A_1=17.441,03

2. slučaj:

$$q = 1 + p_c = (1+p/m)^{1/s}$$

$$Z = smgA_1(1+p/m)^{-1/s} \quad \textbf{(97)}$$

$$A_1=(1+p/m)^{1/s}Z/smg \quad \textbf{(98)}$$

Primer 20.

Zajam od 100.000 din treba otplatiti 5 meseci, mesečnim anuitetima koji sukcesivno rastu za 2% u odnosu na prethodni, uz 2% kamate mesečno. Izraditi plan otplaćivanja.

☛ **Rešenje:** (Tabela 9)

$Z = 100.000$; $q=5/12$; $m=12$; $s=1$; $p/m=0,02$; $q=1,02$;
$A_1 = 1,02 \cdot 100.000/5 = 20.400$

Tabela 9

j	D_{j-1}	$I_j=p_c \cdot D_{j-1}$	$A_j= A_{j-1} \cdot 1,02$	$B_j = A_j - I_j$
1	100.000,00	2.000,00	20.400,00	18.400,00
2	81.600,00	1.632,00	20.808,00	19.176,00
3	62.424,00	1.248,48	21.224,16	19.975,68
4	42.448,32	848,97	21.648,64	20.799,68
5	21.648,64	432,97	22.081,62	21.648,64
Σ	–	**6.162,42**	**106.162,42**	**100.000,00**

$p_c=0,02$; $q=1,02$; $A_1=20.400$

5.2.4. Anuiteti heterogeno (nepravilno) različiti ili proizvoljno određeni

Pošto u ovom slučaju ne postoji jedinstvena matematička veza između anuiteta, plan amortizacije se radi prema opšte važećim pravilima.

$$I_j = p_c \cdot D_{j-1};\ B_j = A_j - I_j;\ D_j = D_{j-1} - B_j$$

Primer 21.

Zajam od 50.000 din treba otplatiti za najviše 5 meseci, mesečnim anuitetima koji su najmanje 10% od ostatka duga, uz 8% kamate mesečno. Izraditi plan otplaćivanja.

☛ **Rešenje:** (Tabela 10)

Pretpostavimo da dužnik, u okviru datih ograničenja, može birati veličinu anuiteta. Ovo međutim nije moguće u slučaju poslednjeg anuiteta koji mora obuhvatiti kamatu na ostatak duga i ostatak duga.

Tabela 10

j	D_{j-1}	$I_j=p_c \cdot D_{j-1}$	A_j	$B_j = A_j - I_j$
1	50.000,00	4.000,00	9.000,00	5.000,00
2	45.000,00	3.600,00	14.600,00	11.000,00
3	34.000,00	2.720,00	12.720,00	10.000,00
4	24.000,00	1.920,00	14.920,00	13.000,00
5	11.000,00	880,00	11.880,00	11.000,00
Σ	–	**13.120,00**	**63.120,00**	**50.000,00**

$p_c = 0,08$;

U poslednjem periodu otplata mora biti jednaka ostatku duga bez obzira na veličinu toga ostatka.

U problemima ove vrste treba voditi računa da po pravilu ora biti $A_j > I_j$, jer će se u protivnom dug povećati.

Poverilac kao izuzetak može dozvoliti i ovaj slučaj ali to kasnije mora biti nadoknađeno. Pretpostavimo da je u obrađenom primeru dozvoljeno da dužnik ne plati anuitet u drugom mesecu, a da u trećem plati samo kamatu, onda bi plan amortizacije izgledao ovako (Tabela 11).

Tabela 11

j	D_{j-1}	$I_j = p_c \cdot D_{j-1}$	A_j	$B_j = A_j - I_j$
1	50.000,00	4.000,00	9.000,00	5.000,00
2	45.000,00	3.600,00	0,00	–3.600,00
3	48.600,00	3.888,00	3.888,00	0,00
4	48.600,00	3.888,00	18.888,00	15.000,00
5	33.600,00	2.688,00	36.288,00	33.600,00
Σ	–	**18.064,00**	**68.064,00**	**50.000,00**

5.3. Konverzija zajmova

U toku otplaćivanja duga, na predlog dužnika ili poverioca može doći do dogovora dužnika i poverioca da se izvrši izmena prvobitno utvrđenih uslova amortizacije. Npr. dužnik predlaže smanjenje veličine anuiteta uz povećanje broja anuiteta; dužnik traži smanjenje kamatne stope ili poverilac traži povećanje kamatne stope; dužnik traži mirovanje duga; dužnik želi odjednom platiti iznos veći od jednog anuiteta; dužnik traži oproštaj dela duga i drugo. Sve ove i druge promene se u terminologiji finansijske matematike nazivaju **konverzija zajma,** ili **konverzija duga**. Ako se konverzija sprovodi tako što se dva ili više dugova spajaju u jedan, onda je reč o tzv. **konsolidaciji dugova.**

Matematički posmatrano problem se sastoji u određivanju ostatka duga na dan konverzije i njegovo svođenje na jedan period pre dospeća prvog novog anuiteta, koji se izračunava iz ostatka duga kao novog zajma.

Primer 22.

Zajam od 15 mil. din amortizuje se za 6 godina, polugodišnjim jednakim anuitetima, uz 5% kamate godišnje i kapitalisanje polugodišnje, a zajam od 20 mil. din. se amortizuje za 8 godina godišnjim jednakim anuitetima uz 6% kamate godišnjeg kapitalisanja. Oba zajma su uredno otplaćivana prvih 5 godina. Tada je dogovoreno da se izvrši izmena uslova tako da se dugovi objedine i otplaćuju polugodišnjim jednakim anuitetima uz 4% kamate godišnje i polugodišnje kapitalisanje, i :

a) da se spajanje dugova izvrši odmah nakon poslednjeg uredno plaćenog anuiteta, da anuitet bude 10% ostatka duga zaokruženo na bližu celu stotinu hiljada i da prvi novi anuitet dospeva za plaćanje 6 meseci od dana konverzije,

b) da se spajanje dugova izvrši 22 meseca nakon poslednjeg uredno plaćenog anuiteta, tj. da od tada važe novi uslovi, da se anuitet plaća 5 godina i da prvi dospeva za plaćanje 2 godine od dana spajanja dugova, tj. od dana konsolidacije.

Izračunati novi anuitet.

☞ **Rešenje:**

a) Obračun ostatka duga prvog zajma na dan konsolidacije:

$$A = 15 \cdot \frac{0{,}025}{1-1{,}025^{-12}}$$

$$D_{10} = A \cdot \frac{1-1{,}025^{-2}}{0{,}025} = 15 \cdot \frac{1-1{,}025^{-2}}{1-1{,}025^{-12}} = 2{,}818486$$ mil. din je ostatak duga prvog zajma na dan spajanja dugova.

Obračun ostatka duga drugog zajma na dan konsolidacije:

$$A = 20 \cdot \frac{0{,}06}{1-1{,}06^{-8}}$$

D_5 = A · $\frac{1-1{,}06^{-3}}{0{,}06}$ = 20 · $\frac{1-1{,}06^{-3}}{1-1{,}06^{-8}}$ = 8,60901998 mil. din je ostatak duga drugog zajma na dan spajanja dugova.

Objedinjavanjem ovih dugova dobije se novi dug:

Z_N = 11427505,62 din.

Novi anuitet će biti:

A_N = 1100000din.

Treba još izračunati koliko puta će se plaćati ovakav anuitet. Prema (82) će biti:

$(2g)_t = -\frac{\ln\left(1-\frac{11427505,62}{1.100.000}\cdot 0,02\right)}{\ln 1,02} = 11,76$ polugodišta, što znači da treba platiti 11 puta anuitet po 1.100.000 din, a 12. put anuitetni ostatak A_o <1.100.000 din.

A_o = (11427505,62–1.100.000 · $\frac{1-1{,}02^{-11}}{0{,}02}$) · $1{,}02^{12}$ = 839541,53 din.

b) Ostatak duga prvog zajma na dan konsolidacije će biti:

D_I = 2,818486 · $1{,}025^{3+4/6}$ = 3,085579 mil. din.

Ostatak duga drugog zajma na dan konsolidacije će biti:

D_{II} = 8609019,98 · $1{,}06^{1+10/12}$ = 9579609,41 din.

Objedinjeni dug na dan konsolidacije iznosi:

D = D_I + D_{II} = 12665188,38 din.

Osnovica za obračun novog anuiteta će biti:

Z_N = D · $1{,}02^3$ = 13440399,23 din.

Novi anuitet će biti:

A_N = Z_N · $\frac{0{,}02}{1-1{,}02^{-10}}$ = 1496272,98 din.

II DEO
AKTUARSKA MATEMATIKA

SADRŽAJ II DELA

1. MATEMATIČKE OSNOVE OSIGURANJA

1.1. Pojam i predmet aktuarske matematike

Aktuarska matematika je oblast matematike kojom se rešavaju računski (matematičko-statistički) problemi osiguranja (pre svega problemi obračuna premija).

Aktuarska matematika uvažava iste principe koje uvažava i finansijska matematika (pre svega princip ekvivalencije svih isplata i svih uplata svedenih na isti vremenski rok). Od finansijske matematike se razlikuje po činjenici da su računi finansijske matematike bezlični, tj. ne zavise od starosti lica, dok su računi aktuarske matematike životnog osiguranja vezani za starost lica koje se osigurava.

Teškoće u predviđanju nastupanja osiguranih događaja su problemi koje aktuarska matematika uspešno rešava koristeći se Zakonom velikih brojeva i računom verovatnoće, koji su omogućili da se kao pomoćno sredstvo formiraju tzv. Tablice smrtnosti i Komutativni brojevi.

1.2. Zakon velikih brojeva

Spoznaja o delovanju ovoga zakona omogućava uočavanje pravilnosti i zakonitosti u nastupanju posmatranog događaja. Karakteristika delovanja zakona velikih brojeva je u posmatranju nastupanja događaja u velikom broju slučajeva, jer se samo u masi ispoljavaju pravilnosti i zakonitosti. Nastupanje događaja pojedinačno i u malom broju predstavlja slučaj, a nastupanje istog događaja u masi se ispoljava kao zakonitost. Tako npr. ako u posmatranoj godini od konkretne grupe ljudi od 8 lica iste starosti umre šestoro (75%), ne treba izvući zaključak da je verovatnoća smrti za ljude posmatrane starosti 75%. Međutim posmatranje grupe od npr. 80000 ljudi iste starosti može rezultirati u formiranju verovatnoće smrti lica posmatrane starosti.
Delovanje Zakona velikih brojeva najbolje ilustruju primeri iz eksperimenata koji su vršeni u svrhu proučavanja vezanih za ovaj zakon.

1. primer

Vršeni su eksperimenti bacanja novčića i praćena pojava grba na gornjoj strani, pri svakom bacanju. Rezultate eksperimenata prikazuje sledeća tabela:

Istraživač	Broj bacanja	Pojava grba (Događaj A)	Relativna učestalost W(A)
Bifon	4040	2048	0,50693=50,693%
K. Pirson	12000	6019	0,50158=50,158%
K.Pirson	24000	12012	0,5005=50,05%

2. primer

Prati se pojava broja 1 na gornjoj površini pri bacanju numerisane kocke (brojevima 1 do 6). Rezultate prikazuje sledeća tabela:

Broj bacanja	Broj pojav. 1 (Događaj B)	Relativna učestalost W(B)
50	5	0,1 = 10%
100	13	0,13 = 13%
500	88	0,176 = 17,6%
1000	159	0,159 = 15,9%
5000	822	0,1644 = 16,44%

Primetimo da broj pojavljivanja grba teži ka $\frac{1}{2}$= 50%, a pojavljivanje broja 1 teži ka $\frac{1}{6}$ = 0,16 ≈ 16,67%.

1.3. Račun verovatnoće

Izračunavanje verovatnoće nastupanja štetnih događaja u osiguranju je osnova za određivanje premija osiguranja. Ove verovatnoće se određuju na osnovu iskustva, a za nove slučajeve na osnovu procene eksperata.

Razlikujemo pojam **klasične definicije verovatnoće** od pojma **empirijske (a posteriori) definicije verovatnoće.**

Vršimo neki eksperiment E. Među ishodima eksperimenta javljaju se događaji A, B, C, ...

Neka je n oznaka za broj svih jednako mogućih ishoda eksperimenta E, a m oznaka za broj ishoda eksperimenta E koji dovode do realizacije (nastupanja) događaja A (tzv. broj povoljnih ishoda za nastupanje događaja A).

Klasična definicija verovatnoće:

Verovatnoća realizacije (nastupanja) događaja A, u oznaci P(A), je odnos broja povoljnih mogućnosti za nastupanje događaja A i svih jednako mogućih ishoda nekog eksperimenta E, tj.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

S obzirom na veličine i odnos brojeva m i n mogući su ovi slučajevi:

(1) m = n, onda je P(A) = 1, pa je tada reč o tzv. **sigurnom događaju**.

(2) m = 0, onda je P(A) = 0, pa je reč o tzv. **nemogućem događaju**.

(3) 0 < m < n, tj. $0 < \frac{m}{n} < 1$, odnosno 0 < P(A) < 1, pa je tada reč o tzv. **slučajnom ili verovatnom događaju.**

Nejednakost 0 ≤ P(A) ≤1 obuhvata sva tri slučaja.

P(A) = $\frac{m}{n}$ je matematičko očekivanje nastupanje događaja A u budućnosti.

Za razliku od pojma klasične definicije verovatnoće, koja podrazumeva izračunavanje verovatnoće pre eksperimenta i nezavisno od toga da li će se eksperiment vršiti, a **posteriori (empirijska) verovatnoća** ili **relativna učestalost događaja A**, u oznaci W(A), se izračunava posle eksperimenta i odnos je broja ishoda u eksperimentu u kojima se realizovao (nastupio) događaj A i broja svih ishoda (ukupno izvršenih pokušaja), tj.

$$W(A) = \frac{M}{n}$$

Primećujemo da pri velikom broju pokušaja bude W(A) ≈ P(A), tj. ako $n \to \infty$, onda $W(A) \to P(A)$. U primerima koje smo iskoristili za objašnjenje zakona velikih brojeva:

$$W(A) \to P(A) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$W(B) \to P(B) = \frac{1}{6} = 0{,}16$$

Ako je P(A) verovatnoća da će se realizovati događaj A, onda je $P(A^C)$ verovatnoća realizacije suprotnog događaja, tj. verovatnoća da se neće realizovati događaj A, pri čemu je $P(A^C) = 1 - P(A)$

1.4. Tablice smrtnosti

Poznavanje računa verovatnoće je omogućilo da se formiraju tzv. Tablice smrtnosti koje služe kao tehnička osnova za formiranje tarifa u osiguranju života.

Osnovni (polazni) pokazatelj tablice smrtnosti su tzv. izravnate verovatnoće smrtnosti. Iz ovih pokazatelja se dalje formiraju ostale biometrijske funkcije, među kojima su: verovatnoća doživljenja i kretanja broja živih i umrlih lica u posmatranom skupu. Ovi podaci, uz upotrebu određene kamatne stope omogućuju da se izračunaju tzv. Komutativni brojevi koji se neposredno koriste za izračunavanje neto premija životnog osiguranja.

Tablice smrtnosti se formiraju direktno ili indirektno.

Direktni metod podrazumeva praćenje života i smrti određenog skupa novorođenih, tako što se konstatuje koliko lica iz toga skupa je ostalo u životu po isteku prve godine života, zatim po isteku druge godine života itd. sve do smrti poslednjeg lica iz posmatranog skupa. Iz mnogo razloga, ovaj metod je praktično neizvodljiv pa se upotrebljava indirektni metod.

Indirektni metod podrazumeva praćenje života i smrti istovremeno (npr. u jednoj godini) za više generacija, tj. za skupove lica starosti od nekog malog broja godina do najdublje starosti. Dobijeni podaci se primene na fiktivnu grupu za sve godine starosti.

Pokazaćemo kako to praktično izgleda:

Neka je l_x oznaka za broj živih lica starih x godina.

Neka se dalje posmatraju, u istoj godini, sledeće grupe:
1. grupa od 100.000 lica starih 10 godina
2. grupa od 100.000 lica starih 11 godina
3. grupa od 100.000 lica starih 12 godina
4. grupa od 100.000 lica starih 13 godina
itd.
46. grupa od 100.000 lica starih 55 godina
itd.
89. grupa od 100.000 lica starih 98 godina
90. grupa od 100.000 lica starih 99 godina
91. grupa od 100.000 lica starih 100 godina
92. grupa od 100.000 lica starih 101 godina,
itd. sve do najstarije grupe lica.
Napomena: kod ovih poslednjih grupa se uzima u skup toliko lica koliko je moguće, s obzirom na mali broj živih lica duboke starosti.
U toku jedne (iste) godine je konstatovano da je umrlo:
6,76‰ lica iz 1. grupe
6,786‰ lica iz 2. grupe
6,812 ‰ lica iz 3. grupe
6,848 ‰ lica iz 4. grupe
itd.
2,166 % lica iz 46. grupe
itd.
75 % lica iz 89. grupe
100% lica iz 90. grupe
91 i ostale grupe nisu ni formirane.
Ovi pokazatelji (promili i procenti) umrlih lica po grupama, primenjeni npr. na 1. grupu kao model, tj. kao fiktivnu grupu, daju podatke slične onima koji bi se dobili praćenjem ove grupe tokom 90 godina. Dobijeni podaci čine moguću tablicu iz koje se dalje izvode drugi podaci potrebni za izračunavanje tarifa u osiguranju života.

- l_{10} = 100.000 (broj živih krajem 10. odnosno početkom 11. godine)
- u toku 11. god. umre 6,76‰ = 676 lica
- l_{11} = 99324 (broj živih krajem 11. odnosno početkom 12. godine)
- u toku 12. godine umre 6,786 ‰ = 674 lica
- l_{12} = 98650 (broj živih krajem 12. odnosno početkom 13. godine)
- u toku 13. godine umre 6,812‰ = 672 lica
- l_{13} = 97978 (broj živih krajem 13. odnosno početkom 14. godine)
- u toku 14. godine umre 6,848‰ = 671 lice
- l_{14} = 97307 (broj živih krajem 14. odnosno početkom 15. godine

itd.

- l_{55} = 63.469 (broj živih krajem 55. odnosno početkom 56. godine)
- u toku 56. godine umre 2,166% = 1375 lica
- l_{56} = 62094

itd.

- l_{98} =4 (broj živih krajem 98. odnosno početkom 99. god.
- u toku 99. godine umre 75% = 3 lica
- l_{99} = 1
- u toku 100. godine umre 100% = 1 lice.
- l_{100} =0 (početkom 101. godine nema živih lica posmatrane grupe)

Dobijeni podaci za l_{10} , l_{11} , l_{12} , ... mogu se naći u Tablicama smrtnosti 17 engleskih društava (interes 4%).

1.5. Verovatnoća života i smrti za jedno lice

Neka su l_x , l_{x+1} , l_{x+2} ,..., l_{x+n} oznake za broj živih lica starih x, x+1, x+2, ..., x+n godina.
Prirodna je činjenica, a vidi se u Tablicama smrtnosti, da važi:
$l_x > l_{x+1} > l_{x+2} > ... > l_{x+n}$.

Neka je dalje d_x oznaka za broj lica koja umru u toku (x+1) -ve godine, tj: između punih x i x+1 godina.
Lako se uočava da je:
(1) $d_x = l_x - l_{x+1} \Rightarrow l_{x+1} = l_x - d_x$

Koristeći račun verovatnoće, dalje zaključujemo:
Verovatnoća p_x da će lice staro x godina doživeti (x+1)-nu godinu iznosi:
(2) $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$
Verovatnoća da će lice staro (x+1)-nu godinu doživeti x+2 godine iznosi:
(3) $p_{x+1} = \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}}$
Po analogiji zaključujemo da važi:
(4) $p_{x+2} = \frac{l_{x+3}}{l_{x+2}}$
itd.
(5) $p_{x+k-1} = \frac{l_{x+k}}{l_{x+k-1}}$
(6) $p_{x+k} = \frac{l_{x+k+1}}{l_{x+k}}$
itd.
(7) $p_{x+n-2} = \frac{l_{x+n-1}}{l_{x+n-2}}$
(8) $p_{x+n-1} = \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}}$
(9) $p_{x+n} =0$

Množenjem (2) sa (3) dobijemo:

(10) $_2p_x = \frac{l_{x+2}}{l_x}$, što predstavlja verovatnoću da će lice staro x godina doživeti x + 2 godine.

Množenjem (2), (3) i (4) dobijemo:

(11) $_3p_x = \frac{l_{x+3}}{l_x}$, što predstavlja verovatnoću da će lice staro x godina doživeti x+3 godine.

Proizvod $p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \ldots p_{x+k-1}$ daje:

(12) $_kp_x = \frac{l_{x+k}}{l_x}$, što predstavlja verovatnoću da će lice staro x godina doživeti x+k godine.

Proizvod $p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \ldots p_{x+k-1} \cdot p_{x+k} \cdot \ldots p_{x+n-1}$ daje:

(13) $_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$, što predstavlja verovatnoću da će lice staro x godina doživeti x+n godina.

Neka je q_x oznaka za verovatnoću da lice staro x godina neće doživeti x+1 godinu, tj. da će umreti u toku (x+1)-ve godine

(14) $q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - p_x$

Verovatnoća da lice staro x godina neće doživeti x+2 godine iznosi:

(15) $_{/2}q_x = \frac{l_x - l_{x+2}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+2}}{l_x} = 1 - {_2p_x}$

itd.

Verovatnoća da lice staro x godina neće doživeti x + k godina, biće:

(16) $_{/k}q_x = \frac{l_x - l_{x+k}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+k}}{l_x} = 1 - {_kp_x}$

itd.

Verovatnoća da lice staro x godina neće doživeti x+n godina, biće:

(17) $_{/n}q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = 1 - {_np_x}$

Primetimo da važe relacije:

$p_x + q_x = 1, {_2p_x} +, {_{/2}q_x} = 1, \ldots, {_np_x} + {_{/n}q_x} = 1$

3. primer

Za lice staro 35 godina izračunati verovatnoću:

a) da će doživeti 36. godinu

b) da neće doživeti 36. godinu, tj. da će umreti u toku 36. godine života

c) da će doživeti 50 godina života

d) da neće doživeti 50 godina života, tj. da će umreti pre nego što navrši 50 godina života.

Rešenje:

a) x = 35

Na osnovu (2), uz upotrebu Tablica smrtnosti, biće:

$$p_{35} = \frac{l_{36}}{l_{35}} = \frac{81814}{82581} = 0{,}990712 = 99{,}07\%$$

b) Prema (14) biće:

$$q_{35} = 1 - p_{35} = 0{,}009288 = 0{,}93\% = 9{,}3‰$$

c) prema (12), biće:

$$_{15}p_{35} = \frac{l_{35+15}}{l_{35}} = \frac{69517}{82581} = 0{,}8418038 = 84{,}18\%$$

d) Prema (16), biće:

$$_{/15}q_{35} = 1 - {}_{15}p_{35} = 0{,}158196 = 15{,}82\%$$

Ako je G oznaka za broj članova neke grupe lica starosti x godina, onda će broj članova ove grupe koji će verovatno živeti posle k godina biti:

$$(18)\quad G_k = G \cdot {}_k p_x = G \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

4. primer

U jednoj firmi ima 14 radnika sa po 20 godina života, 10 radnika sa po 28 godina, 8 radnika sa po 34 godine, 5 radnika sa po 42 godine i 2 radnika sa po 56 godina. Koliko od ovih radnika će verovatno živeti posle 15 godina?

Rešenje

$$G_{15} = 14 \cdot \frac{l_{20+15}}{l_{20}} + 10 \cdot \frac{l_{28+15}}{l_{28}} + 8 \cdot \frac{l_{34+15}}{l_{34}} + 5 \cdot \frac{l_{42+15}}{l_{42}} + 2 \cdot \frac{l_{56+15}}{l_{56}} = 14 \cdot \frac{82581}{93268} + 10 \cdot \frac{76173}{87726} +$$

$$+ 8 \cdot \frac{70580}{83339} + 5 \cdot \frac{60658}{77012} + 2 \cdot \frac{33510}{62094} \approx 33$$

Posle 15 godina će verovatno biti u životu 33 od 39 radnika posmatrane firme.

1.6. Verovatno i srednje trajanje života

Ako prihvatimo da verovatnoća da će lice staro x godina živeti u proseku još k godina iznosi 50%, tj. 1/2, onda se iz relacije:

(19) $\frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{1}{2} \Rightarrow l_{x+k} = \frac{l_x}{2}$

dobije x + k kao broj koji možemo prihvatiti kao verovatno trajanje života osobe stare x godina.

5. primer

Koliko iznosi verovatno trajanje života osobe stare 35 godina?

Rešenje:

$l_{35+k} = \frac{82581}{2} = 41290{,}5$

Uvidom u Tablice smrtnosti zaključujemo da je:

$l_{67} = 42565 > l_{35+k} = 41290{,}5 > l_{68} = 40374$

tj. da je $67 < 35 + k < 68$

Po dogovoru zaokružujemo na manji broj godina tj. uzimamo da je:

$35 + k \approx 67 \Rightarrow k \approx 32$.

Verovatno trajanje života lica starog 35 godina iznosi približno još 32 godine.

Za određivanje srednjeg trajanja života pođimo od sledećih varijanti:

I varijanta

Uzmimo da sve osobe koje umru u toku jedne godine umru početkom godine. Po ovoj varijanti od grupe koja čini l_x lica starih x godina sledeću (x+1)-vu godinu doživeće l_{x+1} lica. Svako od ovih l_{x+1} lica u posmatranoj godini živi po 1 godinu, pa ukupan broj proživelih godina za posmatranu grupu l_{x+1}. Drugu godinu proživeće l_{x+2} osobe, itd.

$l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots$ je ukupan broj godina koje prožive sve osobe grupe od l_x lica.

Srednje trajanje života lica iz ove grupe biće:

(20) $e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots}{l_x}$

II varijanta

Uzmimo da sve osobe koje umru u toku jedne godine, umru krajem godine, pa će biti:

(21) $e'_x = \frac{l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots}{l_x} = 1 + e_x$

Rešenje problema približnog određivanja srednjeg trajanja života bi moglo da se nađe u aritmetičkoj sredini I i II varijante jer se umiranje raspoređuje tokom cele godine, pa će biti:

(22) $e_x^o = \frac{e_x + e'_x}{2} = \frac{e_x + 1 + e_x}{2} = \frac{1}{2} + e_x$

6. primer:
Koliko iznosi srednje trajanje života osobe stare 35 godina?

Rešenje:

$$e_{35}^o = \frac{1}{2} + \frac{l_{36} + l_{37} + l_{38} + \ldots}{l_{35}} = 0{,}5 + \frac{2508901}{82581}$$

$$e_{35}^o \approx 30{,}88$$

Očekivano srednje trajanje života lica starosti 35 godina je još 30,88 godina.

1.7. Komutativni brojevi

Napred objašnjeni pokazatelji l_x i d_x vezani za broj živih odnosno umrlih lica čine grupu tzv. **osnovnih brojeva** tablica smrtnosti, pri čemu je:
l_{x+k} - oznaka za broj živih lica starih x+k godina
d_{x+k} - oznaka za broj umrlih lica u toku (x+k+1)-ve godine, pa je $d_{x+k} = l_{x+k} - l_{x+k+1}$

Upotrebom ovih osnovnih brojeva i obračunske kamatne stope p izračunavaju se sledeći izvedeni brojevi, pod nazivom **komutativni brojevi:**

A) Komutativni brojevi za živa lica:

(23) $D_x = l_x (1+p)^{-x} = l_x \cdot r^{-x} = \frac{l_x}{r^x}, \qquad r = 1 + p$

D_x je oznaka za broj diskontovanih živih lica starih x godina
Slično objašnjavamo D_{x+1}, D_{x+2}, D_{x+3}, ...

(24) $N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D\omega$

N_x je oznaka za komutativni broj koji predstavlja zbir brojeva diskontovanih živih lica, počev od starosti x do najdublje starosti ω.
Po analogiji zaključujemo da važi:

(25) $N_{x+1} = D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D\omega$

Oduzimanjem (25) od (24) dobije se:

(26) $N_x - N_{x+1} = D_x \Rightarrow N_{x+1} = N_x - D_x \Rightarrow N_x = D_x + N_{x+1}$

(27) $S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \ldots + N\omega$

S_x je oznaka za komutativni broj koji predstavlja zbir zbirova diskontovanih živih lica, počev od starosti x do najdublje starosti ω, koju prema tablicama doživi posmatrana grupa.
Po analogiji zaključujemo da važi:

(28) $S_{x+1} = N_{x+1} + N_{x+2} + ... + N\omega$

Oduzimanjem (28) od (27) dobije se:

(29) $S_x - S_{x+1} = N_x \Rightarrow S_x = N_x + S_{x+1} \Rightarrow S_{x+1} = S_x - N_x$

B) Komutativni brojevi za umrla lica:

(30) $C_x = d_x(1+p)^{-(x+1)} = d_x \cdot r^{-(x+1)}$

C_x je oznaka za broj diskontovanih umrlih lica u toku (x+1)ve godine
Slično objašnjavamo C_{x+1} , C_{x+2} , C_{x+3} ...

(31) $M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + ... + C_{\omega-1}$

M_x je oznaka za komutativni broj koji predstavlja zbir brojeva diskontovanih umrlih lica, počev od onih koja su umrla u toku (x+1)-ve godine.
Po analogiji zaključujemo da važi:

(32) $M_{x+1} = C_{x+1} + C_{x+2} + ... + C_{\omega-1}$

Oduzimanjem (32) od (31) dobije se:

(33) $M_x - M_{x+1} = C_x \Rightarrow M_x = C_x + M_{x+1} \Rightarrow M_{x+1} = M_x - C_x$

(34) $R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + ... + M_{\omega-1}$

R_x je oznaka za komutativni broj koji predstavlja zbir zbirova brojeva diskontovanih umrlih lica, počev sa onima koji su umrli u toku (x+1)-ve godine starosti.

Po analogiji zaključujemo da važi:

(35) $R_{x+1} = M_{x+1} + M_{x+2} + ... + M_{\omega-1}$

Oduzimanjem (35) od (34) dobije se:

(36) $R_x - R_{x+1} = M_x \Rightarrow R_x = M_x + R_{x+1} \Rightarrow R_{x+1} = R_x - M_x$
Rezime:

l_x, p_x, D_x, N_x i S_x su pokazatelji vezani za broj živih lica.
d_x, q_x, C_x, M_x i R_x su pokazatelji vezani za broj umrlih lica.

Veze između komutativnih brojeva D_x, C_x, N_x i M_x:

$$C_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{r^{x+1}} = \frac{l_x}{r^{x+1}} - \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} = \frac{l_x}{r^x \cdot r} - D_{x+1}$$

(37) $C_x = r^{-1} \cdot D_x - D_{x+1}$

Po analogiji će biti:

(37a) $C_{x+1} = r^{-1} \cdot D_{x+1} - D_{x+2}$
(37b) $C_{x+2} = r^{-1} \cdot D_{x+2} - D_{x+3}$
itd.
Zamenom (37), (37a), (37b)... u (31) dobije se:

$$M_x = D_x \cdot r^{-1} - D_{x+1} + D_{x+1} \cdot r^{-1} - D_{x+2} + D_{x+2} \cdot r^{-1} - D_{x+3} + \ldots$$

(38) $M_x = (D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots)\, r^{-1} - (D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots)$

Prema (24) i (25), (38) postaje:

(39) $M_x = N_x \cdot r^{-1} - N_{x+1} = N_x \cdot r^{-1} - (N_x - D_x) =$
$= N_x (r^{-1} - 1) + D_x = D_x - N_x (1 - r^{-1})$

2. OBRAČUN TARIFA U ŽIVOTNOM OSIGURANJU

Osigurava se: **Uplatom:**	**LIČNA RENTA** **(Višekratni iznos)**	**KAPITAL** **(Jednokratni iznos)**
MIZE **(Jednokratni iznos)**	a) Neposredna doživotna renta b) Odložena doživotna renta c) Neposredna privremena renta d) Odložena privremena renta	a) Osiguranje kapitala za slučaj smrti: - Doživotno - Odloženo - Privremeno - Odloženo i privremeno b) Osiguranje kapitala za slučaj doživljenja c) Mešovito osiguranje kapitala
PREMIJE **(Višekratni iznos)**	a) Premija se plaća doživotno - Renta se prima neposredno i doživotno - Renta se prima odloženo i doživotno b) Premija se plaća privremeno - Renta se prima neposredno i doživotno - Renta se prima privremeno - Renta se prima odloženo i privremeno	a) Premija se plaća doživotno - Neposredno osiguranje kapitala - Odloženo osiguranje kapitala b) Premija se plaća privremeno - Doživotno osiguranje kapitala za slučaj smrti - Privremeno osiguranje kapitala za slučaj smrti - Privremeno osiguranje kapitala za slučaj doživljenja - Mešovito osiguranje kapitala

2.1. OSIGURANJE LIČNE RENTE

2.1.1. Uplatom mize

Miza je jednokratna premija koju osiguranik treba da uplati osiguravajućem društvu, da bi u budućnosti, po osnovu tako uplaćene mize, primao rentu kao višekratni iznos ili kapital, kao jednokratni iznos.

2.1.1.1. Neposredna doživotna renta

a) Anticipativna renta (renta početkom godine - perioda)

Opšti zadatak:

Koliko iznosi neto miza koju treba da uplati lice staro x godina, da bi po osnovu uplate primalo godišnju rentu od R dinara početkom svake godine, neposredno od dana osiguranja, do kraja života?

neka je a_x oznaka za neto mizu za 1 din. ovakve rente.
Pretpostavimo dalje da će l_x lica starih x godina osigurati rentu od po 1 dinara.
Osiguravajuće društvo će, u tom slučaju, od l_x lica primiti $l_x a_x$ dinara, a isplatiti:
- početkom 1. godine l_x 1 din = l_x din.
- početkom 2. godine l_{x+1} 1 din = l_{x+1} din.
- početkom 3. godine l_{x+2} 1 din = l_{x+2} din.

itd.
Poštujući principe finansijske matematike koji važe i u aktuarskoj matematici, biće:
zbir uplata = zbir isplata (svedenih na "danas")

$$l_x a_x = l_x + \frac{l_{x+1}}{r} + \frac{l_{x+2}}{r^2} + \ldots / \frac{1}{r^x}$$

$$\frac{l_x}{r^x} \cdot a_x = \frac{l_x}{r^x} + \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + \frac{l_{x+2}}{r^{x+2}}$$

$$D_x \cdot a_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots$$

(40) $D_x \cdot a_x = N_x \Rightarrow a_x = \dfrac{N_x}{D_x}$

(41) $M = R \cdot a_x$

b) Dekurzivna renta (renta krajem godine)

Opšti zadatak:

Koliko iznosi neto miza koju treba da uplati lice staro x godina, da bi po osnovu uplate primalo godišnju rentu od R dinara, krajem svake godine, neposredno od godine osiguranja do kraja života?

Neka je a'_x oznaka za neto mizu za 1 din. ovakve rente.

Uplate = Isplate :

$l_x a'_x = l_{x+1}\cdot r^{-1} + l_{x+2}\cdot r^{-2} + \ldots \qquad /\cdot r^{-x}$

$l_x a'_x \cdot r^{-x} = l_{x+1}\cdot r^{-(x+1)} + l_{x+2}\cdot r^{-(x+2)} + \ldots$

$D_x \cdot a'_x = D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots$

$D_x \cdot a'_x = N_x - D_x$

(42) $a'_x = \dfrac{N_x - D_x}{D_x} = \dfrac{N_x}{D_x} - 1 = a_x - 1 = \dfrac{N_{x+1}}{D_x}$

(43) $M = R \cdot a'_x$

7. primer

Lice staro 35 godina, 25 godina i 65 godina, osigurava rentu od 1000 dinara, koju će primati od dana osiguranja do kraja života, godišnje: a) anticipativno, b) dekurzivno. Koliko iznosi miza za ovo osiguranje?

Rešenje:

a)Za x = 35

$a_{35} = \dfrac{N_{35}}{D_{35}} = \dfrac{358785{,}45}{20927{,}30} = 17{,}14437$

$M = 1000 \cdot a_{35} = 1000 \cdot 17{,}14437 = 17144{,}37$ din.

Za x = 25

$M = 1000 \cdot a_{25} = 1000\cdot\dfrac{N_{25}}{D_{25}} = 1000\cdot\dfrac{633626{,}65}{33698{,}62} = 18802{,}75$ din.

Za x = 60

$M = 1000 \cdot a_{65} = 1000\cdot\dfrac{N_{65}}{D_{65}} = 1000\cdot\dfrac{32276{,}412}{3653{,}017} = 8835{,}55$ din.

b) Za x = 35

$a'_{35} = \dfrac{N_{35+1}}{D_{35}} = 16{,}14437$

$M = 1000 \cdot a'_{35} = 16144{,}37$ din.

2.1.1.2. Odložena doživotna lična renta

Opšti zadatak:

Lice staro x godina osigurava rentu od R dinara koju treba da prima doživotno, počev od isteka k godina od dana osiguranja. Izračunati neto mizu za ovo osiguranje.

Napomena:

Ako osiguranik umre pre nego što počne da prima rentu, uplaćenu mizu zadržava osiguravajuće društvo, a ako umre posle primljene prve rente, preostali deo mize se koristi za isplatu živim osiguranicima.

a) Anticipativna renta
Ako je ${}_{k/}a_x$ oznaka za neto mizu za 1 dinar ove rente, onda se dobije:

(44) $${}_{k/}a_x = \frac{N_{x+k}}{D_x}$$

(45) $M = R \cdot {}_{k/}a_x$

$${}_{n/}a_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \rightarrow a_x \quad ako \quad N_{x+n} \rightarrow 0,$$

tj. ako $x + n \rightarrow \omega + 1$ *odnosno* $n \rightarrow \omega + 1 - x$, **ω** je najdublja starost za koju postoje podaci u Tablici smrtnosti.
Kraće:

$$\lim_{n \rightarrow (\omega+1-x)} {}_{/n}a_x = a_x$$

b) Dekurzivna renta
Ako je ${}_{k/}a'_x$ oznaka za neto mizu za 1 dinar ove rente, onda se dobije:

(46) $${}_{k/}a'_x = \frac{N_{x+k+1}}{D_x}$$

(47) $M = R \cdot {}_{k/}a'_x$

8. primer:
Lice staro 35 godina osigurava rentu, od 1000 dinara koju će primati doživotno godišnje a) anticipativno, b) dekurzivno, po isteku 15 godina od dana osiguranja. Koliko iznosi neto miza za ovo osiguranje?

Rešenje:

a) $${}_{15/}a_{35} = \frac{N_{35+15}}{D_{35}} = \frac{131765{,}619}{20927{,}30} = 6{,}2963506$$

$M = 1000 \cdot {}_{15/}a_{35} = 6296{,}35$ dinara

b) $${}_{15/}a'_{35} = \frac{N_{35+15+1}}{D_{35}} = \frac{121983{,}7}{20927{,}30} = 5{,}8289268$$

$M = 1000 \cdot {}_{15/}a'_{35} = 5828{,}93$ dinara.

2.1.1.3. Neposredna privremena renta

Opšti zadatak:
Lice staro x godina osigurava rentu od R dinara, da je prima doživotno, ali najviše n godina. Koliko iznosi neto miza za ovo osiguranje?

a) Anticipativna renta

Ako je ${}_{/n}a_x$ oznaka za neto mizu za 1 dinar ove rente, onda se dobije:

(48) $${}_{/n}a_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

(49) $M = R \cdot {}_{/n}a_x$

b) Dekurzivna renta

Ako je ${}_{/n}a'_x$ oznaka za neto mizu za 1 dinar ove rente, onda se dobije:

(50) $${}_{/n}a'_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

(51) $M = R \cdot {}_{/n}a'_x$

9. primer

Lice staro 35 godina osigurava rentu od 1000 dinara, da je prima doživotno, ali najviše 20 godina, počev neposredno po osiguranju: a) anticipativno, b) dekurzivno: Koliko iznosi miza za ovo osiguranje?

a) $M = 1000 \cdot {}_{/20}a_{35} = 1000 \cdot \frac{N_{35} - N_{55}}{D_{35}} = 12942{,}96$ din.

b) $M = 1000 \cdot {}_{/20}a'_{35} = 1000 \cdot \frac{N_{36} - N_{56}}{D_{35}} = 12293{,}73$ din.

2.1.1.4. Odložena privremena renta

Opšti zadatak:

Lice staro x godina osigurava rentu od R dinara, da je prima po isteku k godina u toku n godina. Koliko iznosi neto miza za ovo osiguranje?

a) Anticipativna renta

Ako je ${}_{k/n}a_x$ oznaka za neto mizu za 1 din. ove rente, onda se dobije:

(52) $${}_{k/n}a_x = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x}$$

(53) $M = R \cdot {}_{k/n}a_x$

b) Dekurzivna renta

Ako je ${}_{k/n}a'_x$ oznaka za neto mizu za 1 dinar ove rente, onda se dobije:

(54) $${}_{k/n}a'_x = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x}$$

(55) M = R · $_{k/n}a'_x$

10. primer
Lice staro 35 godina osigurava rentu od 1000 dinara, da je prima po isteku 15 godina, ali najviše 20 godina. Koliko iznosi neto miza za ovo osiguranje, ako je renta: a) anticipativna, b) dekurzivna?

Rešenje:

a) M = 1000 · $_{15/20}a_{35} = 1000\dfrac{N_{35+15} - N_{35+15+20}}{D_{35}} = 5491{,}66 din.$

b) M = 1000 · $_{15/20}a'_{35} = 1000\dfrac{N_{35+15+1} - N_{35+15+20+1}}{D_{35}} = 5134{,}21 din.$

2.1.2. Uplatom premije

Premija je višekratni iznos koji se uplaćuje u jednakim vremenskim razmacima (godišnje) i jednakim ili promenljivim iznosima, u svrhu osiguranja primanja jednokratnog iznosa (kapitala) ili višekratnog iznosa (rente).

2.1.2.1. Premija se plaća doživotno (godišnje, anticipativno)

(A) Renta se prima neposredno i doživotno

Opšti zadatak:
Lice staro x godina osigurava rentu od R dinara, da je prima neposredno i doživotno. Koliko iznosi premija P za ovo osiguranje?

Rešenje:
a) Anticipativna renta
Ako je P(a_x) oznaka za premiju koja obezbeđuje rentu od 1 dinar, onda se dobije:

Uplate = Isplate :

$l_x \cdot P(a_x) + l_{x+1} \cdot P(a_x) \cdot r^{-1} + l_{x+2} \cdot P(a_x) \cdot r^{-2} + ... = l_x \cdot 1 + l_{x+1} \cdot 1 \cdot r^{-1} + l_{x+2} \cdot 1 \cdot r^{-2} + ...$

$(l_x + l_{x+1} \cdot r^{-1} + l_{x+2} \cdot r^{-2} + ...) \cdot P(a_x) = l_x + l_{x+1} \cdot r^{-1} + l_{x+2} \cdot r^{-2} + ...$

P(a_x) = 1 ⇒ P = R · P(a_x)= R
Ovaj slučaj nema praktičnog smisla!

b) Dekurzivna renta

Ako je P(a'_x) oznaka za premiju koja obezbeđuje rentu od 1 dinar, onda se dobije:

Uplate = Isplate :

$$l_x \cdot P(a'_x) + l_{x+1} \cdot P(a'_x) \cdot r^{-1} + l_{x+2} \cdot P(a'_x) \cdot r^{-2} + \ldots = l_{x+1} \cdot 1 \cdot r^{-1} + l_{x+2} \cdot 1 \cdot r^{-2} + \ldots / \cdot r^{-x}$$

$$(l_x \cdot r^{-x} + l_{x+1} \cdot r^{-(x+1)} + l_{x+2} \cdot r^{-(x+2)} + \ldots) \cdot P(a'_x) = l_{x+1} \cdot r^{-(x+1)} + l_{x+2} \cdot r^{-(x+2)} + \ldots$$

$$(D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots) \cdot P(a'_x) = D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots$$

$$N_x \cdot P(a'_x) = N_x - D_x \Rightarrow P(a'_x) = \frac{N_x - D_x}{N_x}$$

(56) $P(a'_x) = 1 - \frac{D_x}{N_x} = 1 - \frac{1}{a_x}$ (vidi (40))

(57) $P = R \cdot P(a'_x)$

11. primer

Lice staro 35 godina osigurava rentu od 1000 dinara, da je prima neposredno, doživotno i dekurzivno. Koliko iznosi premija za ovo osiguranje, ako je premija anticipativna?

Rešenje:

$$P = 1000 \cdot \left(1 - \frac{D_{35}}{N_{35}}\right) = 941{,}67 din.$$

(B) Renta se prima posle k godina i doživotno (anticipativno)

Opšti zadatak:

Lice staro x godina osigurava rentu od R dinara, da je prima posle k godina, doživotno. Koliko iznosi premija za ovo osiguranje?

Rešenje:

Ako je $P({}_{k/}a_x)$ oznaka za premiju koja obezbeđuje rentu od 1 dinar, onda se dobije:

(58) $P({}_{k/}a_x) = \frac{N_{x+k}}{N_x}$

(59) $P = R \cdot P({}_{k/}a_x)$

12. primer

Lice staro 35 godina osigurava rentu od 1000 dinara. Renta počinje da se prima po isteku 15 godina od dana osiguranja i doživotno. Izračunati premiju koja se plaća anticipativno i doživotno.

Rešenje:

$$P = 1000 \cdot \frac{N_{35+15}}{N_{35}} = 367{,}25 din.$$

2.1.2.2. Premija se plaća privremeno (najviše m puta) i anticipativno

(A) Renta se prima neposredno i doživotno

Opšti zadatak:
Lice staro x godina osigurava rentu od R dinara, da je prima neposredno i doživotno. Koliko iznosi premija za ovo osiguranje, ako se plaća najviše m puta?

Rešenje:
Ako je ${}_mP(a_x)$ oznaka za premiju koja obezbeđuje rentu od 1 dinar, onda se dobije:

(60) $${}_mP(a_x) = \frac{N_x}{N_x - N_{x+m}}$$

(61) $P = R \cdot {}_mP(a_x)$

13. primer
Lice staro 35 godina osigurava rentu od 1000 dinara. Renta se prima neposredno i doživotno, a premija se plaća prvih 14 godina i anticipativno. Izračunati premiju.

Rešenje:
$$P = 1000 \cdot \frac{N_{35}}{N_{35} - N_{35+14}} = 1655{,}75 din.$$

(B) Renta se prima posle k godina i doživotno

Opšti zadatak:
Lice staro x godina osigurava rentu od R dinara, da je prima posle k godina, doživotno i anticipativno. Koliko iznosi premija za ovo osiguranje, ako će se plaćati m puta?

Rešenje:
Ako je $({}_{k/}a_x)$ oznaka za premiju koja obezbeđuje rentu od 1 dinar, onda se dobije:

(62) $${}_mP({}_{k/}a_x) = \frac{N_{x+k}}{N_x - N_{x+m}}$$

(63) $P = R \cdot {}_mP({}_{k/}a_x)$

14. primer
Lice staro 35 godina osigurava rentu od 1000 dinara. Renta se prima posle 15 godina i doživotno, a premija se plaća prvih 14 godina i anticipativno. Koliko iznosi premija?

Rešenje:
$$P = 1000 \cdot {}_{14}P({}_{15/}a_{35}) = 1000 \cdot \frac{N_{35+15}}{N_{35} - N_{35+14}} = 608{,}08 din.$$

(C) Renta se prima prvih n godina

(64) ${}_{\mathrm{m}}\mathrm{P}({}_{/n}a_x) = \dfrac{N_x - N_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$

(65) $\mathrm{P} = \mathrm{R} \cdot {}_{\mathrm{m}}\mathrm{P}({}_{/n}a_x)$

15. primer

Lice staro 35 godina osigurava rentu od 1000 dinara. Renta se prima prvih 20 godina, a premija se plaća prvih 14 godina i anticipativno. Koliko iznosi premija?

Rešenje:

$$P = 1000 \cdot {}_{14}P({}_{/20}a_{35}) = 1000 \cdot \frac{N_{35} - N_{35+20}}{N_{35} - N_{35+14}} \approx 1250 din.$$

(D) Renta se prima posle k godina, ali najviše n puta

(66) ${}_{\mathrm{m}}\mathrm{P}({}_{k/n}a_x) = \dfrac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{N_x - N_{x+m}}$

(67) $P = R \cdot {}_m P({}_{k/n}a_x)$

16. primer

Lice staro 35 godina osigurava rentu od 1000 dinara. Renta se prima posle 15 godina ali najviše 20 godina, a premija se plaća prvih 14 godina i anticipativno. Koliko iznosi premija?

Rešenje:

$$P = 1000 \cdot {}_{14}P({}_{15/20}a_{35}) = 1000 \cdot \frac{N_{35+15} - N_{35+15+20}}{N_{35} - N_{35+14}} = 530{,}37 din.$$

2.2. OSIGURANJE KAPITALA

2.2.1. Uplatom mize

Reč je o osiguranju koje podrazumeva uplatu jednokratnog iznosa (miza) radi obezbeđenja mogućnosti dobijanja u budućnosti jednokratnog iznosa (kapitala)

2.2.1.1. Osiguranje kapitala za slučaj smrti

(A) Doživotno

Po osnovu uplaćene mize naslednicima se isplaćuje osigurani iznos (kapital -K).

Ako je A_x oznaka za mizu za 1 dinar kapitala, onda se dobije:

Uplate = Isplate :

$$A_x \cdot l_x = d_x \cdot r^{-1} + d_{x+1} \cdot r^{-2} + \ldots / \cdot r^{-x}$$

$$A_x \cdot l_x \cdot r^{-x} = d_x \cdot r^{-(x+1)} + d_{x+1} \cdot r^{-(x+2)} + \ldots$$

$$A_x D_x = C_x + C_{x+1} + \ldots$$

$$A_x D_x = M_x$$

(68) $A_x = \dfrac{M_x}{D_x}$

(69) $M = K \cdot A_x$

17. primer

Lice staro 35 godina osigurava kapital od 100000 dinara. Kapital se isplaćuje naslednicima posle smrti osiguranika. Koliko iznosi miza za ovo osiguranje?

Rešenje:

$$M = 100000 \cdot A_{35} = 100000 \cdot \frac{M_{35}}{D_{35}} = 34060{,}10 din.$$

(B) Odloženo

Naslednicima se isplaćuje K dinara, ali samo ako osiguranik umre po isteku k godina.

(70) ${}_{k/}A_x = \dfrac{M_{x+k}}{D_x}$

(71) $M = K \cdot {}_{k/}A_x$

18. primer

Lice staro 35 godina osigurava kapital od 100000 dinara. Kapital se isplaćuje naslednicima ako osiguranik umre po isteku 15 godina od dana osiguranja. Koliko iznosi miza za ovo osiguranje?

Rešenje:

$$M = 100000 \cdot {}_{15/}A_{35} = 100000 \cdot \frac{M_{35+15}}{D_{35}} = 22525{,}65 din.$$

(C) Privremeno

Naslednicima se isplaćuje K dinara, ali samo ako osiguranik umre u prvih n godina. Ako umre posle toga perioda, osiguravajuće društvo zadržava mizu.

(72) $_{/n}A_x = \dfrac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$

(73) M = K · $_{/n}A_x$

19. primer

Lice staro 35 godina osigurava kapital od 100000 dinara. Kapital se isplaćuje naslednicima ako osiguranik umre u prvih 20 godina. Ako umre posle toga, osiguravajuće društvo zadržava mizu. Koliko iznosi miza za ovo osiguranje?

Rešenje:

$$M = 100000 \cdot {}_{/20}A_{35} = 100000 \cdot \frac{M_{35} - M_{35+20}}{D_{35}} = 15143 din.$$

(D) Odloženo i privremeno

Naslednicima se isplaćuje K dinara, ali samo ako osiguranik umre posle k godina u sledećih n godina.

(74) $_{k/n}A_x = \dfrac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x}$

(75) M = K · $_{k/n}A_x$

20. primer

Lice staro 35 godina osigurava kapital od 100000 dinara. Kapital se isplaćuje naslednicima ako osiguranik umre posle 15 godina od dana osiguranja, a u toku sledećih 20 godina. Koliko iznosi miza za ovo osiguranje?

Rešenje:

$$M = 100000 \cdot {}_{15/20}A_{35} = 100000 \cdot \frac{M_{35+15} - M_{35+15+20}}{D_{35}} = 14623{,}34 din.$$

2.2.1.2. Osiguranje kapitala za slučaj doživljenja

Osigurana suma se isplaćuje samo osiguraniku ako doživi narednih n godina.

(76) $_{/n}E_x = \dfrac{D_{x+n}}{D_x}$

(77) M = K $\cdot {}_{/n}E_x$

21. primer
Lice staro 35 godina osigurava kapital od 100000 dinara. Kapital se isplaćuje osiguraniku ako doživi narednih 20 godina. Koliko iznosi miza za ovo osiguranje?

Rešenje:

$$M = 100000 \cdot {}_{/20}E_{35} = 100000 \cdot \frac{D_{35+20}}{D_{35}} = 35076{,}38 din.$$

2.2.1.3. Mešovito osiguranje kapitala

Osigurana suma se isplaćuje osiguraniku ako doživi narednih n godina, a naslednicima, ako umre pre toga.

(78) $A_{x,n} = {}_{/n}A_x + {}_{/n}E_x = \dfrac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$

(79) M = K $\cdot$ $A_{x,n}$

22. primer
Lice staro 35 godina osigurava kapital od 100000 dinara. Kapital se isplaćuje osiguraniku ako doživi narednih 20 godina ili naslednicima ako umre pre toga. Koliko iznosi miza za ovo osiguranje?

Rešenje:

$$M = 100000 \cdot A_{35,20} = 100000\left({}_{/20}A_{35} + {}_{/20}E_{35}\right) = 100000 \cdot \frac{M_{35} - M_{35+20} + D_{35+20}}{D_{35}} = 50219{,}38 din.$$

2.2.2. Uplatom premije

Reč je o osiguranju koje podrazumeva uplate višekratnog iznosa (premije), radi obezbeđenja mogućnosti dobijanja u budućnosti jednokratnog iznosa (kapitala)

2.2.2.1. Premija se plaća doživotno

(A) Neposredno osiguranje kapitala (bez uslova i ograničenja)

Naslednicima se isplaćuje osigurana suma (kapital) bez obzira kada osiguranik umre.

$P(A_x)$ je oznaka za premiju koja obezbeđuje 1 dinar kapitala, pa će biti:

Uplate = Isplate :

$l_x \cdot P(A_x) + l_{x+1} \cdot P(A_x) \cdot r^{-1} + ... = d_x \cdot r^{-1} + d_{x+1} \cdot r^{-2} + .../\cdot r^{-x}$

$(D_x + D_{x+1} + ...) \cdot P(A_x) = C_x + C_{x+1} + ...$

$N_x \cdot P(A_x) = M_x$

(80) $P(A_x) = \dfrac{M_x}{N_x} = \dfrac{A_x}{a_x}$

(81) $P = K \cdot P(A_x)$

23. primer

Lice staro 35 godina osigurava kapital od 100000 dinara. Kapital se isplaćuje naslednicima posle smrti osiguranika. Koliko iznosi premija za ovo osiguranje?

Rešenje:

$$P = 100000 \cdot P(A_{35}) = 100000 \cdot \frac{M_{35}}{N_{35}} = 1986{,}66 din.$$

(B) Odloženo osiguranje kapitala

Naslednicima se isplaćuje osigurana suma, ali samo ako osiguranik umre posle k godina.

(82) $P({}_{k/}A_x) = \dfrac{M_{x+k}}{N_x} = \dfrac{{}_{k/}A_x}{a_x}$

(83) $P = K \cdot P({}_{k/}A_x)$

24. primer

Lice staro 35 godina osigurava kapital od 100000 dinara. Kapital se isplaćuje naslednicima ako osiguranik umre po isteku 15 godina od dana osiguranja. Koliko iznosi premija za ovo osiguranje?

Rešenje:

$$P = 100000 \cdot P({}_{15/}A_{35}) = 100000 \cdot \frac{M_{35+15}}{N_{35}} = 1313{,}88 din.$$

2.2.2.2. Premija se plaća privremeno (m puta)

(A) Doživotno osiguranje kapitala za slučaj smrti (bez uslova i ograničenja)

Naslednicima se isplaćuje osigurana suma, bez obzira kada osiguranik umre.

(84) ${}_mP(A_x) = \dfrac{M_x}{N_x - N_{x+m}} = \dfrac{A_x}{{}_{/m}a_x}$

(85) $P = K \cdot {}_mP(A_x)$

25. primer
Lice staro 35 godina osigurava kapital od 100000 dinara. Kapital se isplaćuje naslednicima posle smrti osiguranika. Koliko iznosi premija koja se plaća 14 godina?

Rešenje:

$$P = 100000 \cdot {}_{14}P(A_{35}) = 100000 \cdot \frac{M_{35}}{N_{35} - N_{35+14}} = 3283{,}41 din.$$

(B) Privremeno osiguranje kapitala za slučaj smrti (na n godina)

Naslednicima se isplaćuje osigurana suma, ako osiguranik umre u toku prvih n godina (period privremenog osiguranja), a ako umre nakon toga, osigurana suma se ne isplaćuje nikom.

(86) $${}_mP({}_{/n}A_x) = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} = \frac{{}_{/n}A_x}{{}_{/m}a_x}$$

(87) P = K · ${}_mP({}_{/n}A_x)$

26. primer
Lice staro 35 godina osigurava kapital od 100000 dinara. Kapital se isplaćuje naslednicima ako osiguranik umre u toku prvih 20 godina. Koliko iznosi premija koja se plaća prvih 14 godina?

Rešenje:

$$P = 100000 \cdot {}_{14}P({}_{/20}A_{35}) = 100000 \cdot \frac{M_{35} - M_{35+20}}{N_{35} - N_{35+14}} = 1462{,}46 din.$$

(C) Privremeno osiguranje kapitala za slučaj doživljenja

Osigurana suma se isplaćuje samo osiguraniku ako doživi n godina privremenog osiguranja.

(88) $${}_mP({}_{/n}E_x) = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} = \frac{{}_{/n}E_x}{{}_{/m}a_x}$$

(89) P = K · ${}_mP({}_{/n}E_x)$

27. primer
Lice staro 35 godina osigurava kapital od 100000 dinara. Kapital se isplaćuje osiguraniku ako doživi 20 godina od dana osiguranja. Koliko iznosi premija koja se plaća 14 godina?

Rešenje:

$$P = 100000 \cdot {}_{14}P({}_{/20}E_{35}) = 100000 \cdot \frac{D_{35+20}}{N_{35} - N_{35+14}} = 3387{,}56 din.$$

(D) Mešovito osiguranje kapitala

Osigurana suma se isplaćuje naslednicima, ako osiguranik umre pre isteka n godina privremenog osiguranja, a osiguraniku ako doživi n godina od dana ugovaranja osiguranja.

(90) $_{m}P(A_{x,n}) = \dfrac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} = {}_{m}P({}_{/n}A_x) + {}_{m}P({}_{/n}E_x)$

(91) P = K · $_{m}P(A_{x,n})$

28. primer

Lice staro 35 godina osigurava kapital od 100000 dinara. Kapital se isplaćuje naslednicima ako osiguranik umre u prvih 20 godina ili osiguraniku ako doživi 20 godina od dana osiguranja. Koliko iznosi premija koja se plaća prvih 14 godina?

Rešenje:

$$P = 100000 \cdot {}_{14}P(A_{35,20}) = 100000 \cdot \frac{M_{35} - M_{35+20} + D_{35+20}}{N_{35} - N_{35+14}} = 4850{,}02 din.$$

LITERATURA

1. Kočović, J., Aktuarske osnove formiranja tarifa u osiguranju lica, Ekonomski fakultet u Beogradu, Beograd, 2006.
2. Kočović, J., Rakonjac, A. T., Zbirka rešenih zadataka iz Finansijske i Aktuarske matematike, Ekonomski fakultet u Beogradu, Beograd, 2005.
3. Vugdelija, D., i drugi, Matematika za ekonomiste, Ekonomski fakultet Subotica, Subotica, 2007.

TEORIJSKA PITANJA

1. Definicija pojmova: procentni i promilni račun
2. Definicija pojma: interesni (kamatni) račun
3. Definicija pojma: dekurzivno obračunavanje kamate
3. Definicija pojma: anticipativno obračunavanje kamate
4. Osnovni principi obračuna kamate
5. Pojam interesa i kapitalisanja
6. Pojam prostog interesa
7. Pojam složenog interesa
8. Pojam kontinuelnog kapitalisanja
9. Definicija konformne kamatne stope
10. Pojam amortizacije zajmova
11. Opis izrade plana amortizacije ako su anuiteti jednaki
12. Način provere tačnosti plana amortizacije
13. Opis izrade plana amortizacije ako su anuiteti različiti
14. Mogući različiti anuiteti
15. Pojam konverzije zajmova
16. Pojam konsolidacije dugova
17. Pojam eskontovanja menica
18. Mogući akteri u procesu eskontovanja menica
19. razlike i sličnosti Finansijske i Aktuarske matematike
20. Pojam i predmet aktuarske matematike
21. Zakon velikih brojeva
22. Definisanje računa verovatnoće
23. Nastanak i način formiranja Tablice smrtnosti
24. Osnovni i izvedeni pokazatelji Tablice smrtnosti
25. Verovatnoća života i smrti jednog lica
26. Definicija pojma: verovatno trajanje života
27. Definicija pojma: srednje trajanje života
28. Vrste komutativnih brojeva
29. Pojam mize
30. Pojam premije
31. Pojam osiguranja lične rente
32. Vrste osiguranja lične rente uplatom mize
33. Vrste osiguranja kapitala uplatom mize
34. Vrste osiguranja lične rente uplatom premije
35. Vrste osiguranja kapitala uplatom premije

FORMULE ZA PREDMET AKTUARSKA MATEMATIKA

1. Matematičko-tehničke osnove životnog osiguranja

$d_x = l_x - l_{x+1} \Rightarrow l_{x+1} = l_x - d_x$

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

$$_k p_x = \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = 1 - p_x$$

$$_{/k} q_x = \frac{l_x - l_{x+k}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+k}}{l_x} = 1 - {_k p_x}$$

$$G_k = G \cdot {_k p_x} = G \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

$$\frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{1}{2} \Rightarrow l_{x+k} = \frac{l_x}{2}$$

$$e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots}{l_x}$$

$$e'_x = \frac{l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots}{l_x} = 1 + e_x$$

$$e_x^o = \frac{1}{2} + e_x$$

$$D_x = l_x (1+p)^{-x} = l_x \cdot r^{-x} = \frac{l_x}{r^x}, \qquad r = 1 + p$$

D_x je oznaka za broj diskontovanih živih lica starih x godina.

$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D\omega$

N_x je oznaka za komutativni broj koji predstavlja zbir brojeva diskontovanih živih lica, počev od starosti x do najdublje starosti ω.

$S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \ldots + N\omega$

S_x je oznaka za komutativni broj koji predstavlja zbir zbirova diskontovanih živih lica, počev od starosti x do najdublje starosti ω, koju prema tablicama doživi posmatrana grupa.

$C_x = d_x(1+p)^{-(x+1)} = d_x \cdot r^{-(x+1)}$

C_x je oznaka za broj diskontovanih umrlih lica u toku (x+1)ve godine.

$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + ... + C_{\omega-1}$

M_x je oznaka za komutativni broj koji predstavlja zbir brojeva diskontovanih umrlih lica, počev od onih koja su umrla u toku (x+1)-ve godine.

$R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + ... + M_{\omega-1}$

R_x je oznaka za komutativni broj koji predstavlja zbir zbirova brojeva diskontovanih umrlih lica, počev sa onima koji su umrli u toku (x+1)-ve godine starosti.

$C_x = r^{-1} \cdot D_x - D_{x+1}$

$M_x = N_x \cdot r^{-1} - N_{x+1} = N_x \cdot r^{-1} - (N_x - D_x) =$
$= N_x (r^{-1} - 1) + D_x = D_x - N_x (1 - r^{-1})$

2. Osiguranje lične rente uplatom mize

Neposredna doživotna renta

a) Anticipativna renta

$a_x = \dfrac{N_x}{D_x}$

$M = R \cdot a_x$

b) Dekurzivna renta

$a'_x = \dfrac{N_x - D_x}{D_x} = \dfrac{N_x}{D_x} - 1 = a_x - 1 = \dfrac{N_{x+1}}{D_x}$

$M = R \cdot a'_x$

Odložena doživotna lična renta

a) Anticipativna renta

${}_{k/}a_x = \dfrac{N_{x+k}}{D_x}$

$M = R \cdot {}_{k/}a_x$

b) Dekurzivna renta

${}_{k/}a'_x = \dfrac{N_{x+k+1}}{D_x}$

$M = R \cdot {}_{k/}a'_x$

Neposredna privremena renta

a) Anticipativna renta

$$_{/n}a_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$M = R \cdot {}_{/n}a_x$

b) Dekurzivna renta

$$_{/n}a'_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$M = R \cdot {}_{/n}a'_x$

Odložena privremena renta

a) Anticipativna renta

$$_{k/n}a_x = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x}$$

$M = R \cdot {}_{k/n}a_x$

b) Dekurzivna renta

$$_{k/n}a'_x = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x}$$

$M = R \cdot {}_{k/n}a'_x$

3. Osiguranje lične rente uplatom premije

Premija se plaća doživotno (godišnje, anticipativno)

(A) Renta se prima neposredno i doživotno

Dekurzivna renta

$$P(a'_x) = 1 - \frac{D_x}{N_x} = 1 - \frac{1}{a_x}$$

$P = R \cdot P(a'_x)$

(B) Renta se prima posle k godina i doživotno (anticipativno)

$$P({}_{k/}a_x) = \frac{N_{x+k}}{N_x}$$

$P = R \cdot P({}_{k/}a_x)$

Premija se plaća privremeno (najviše m puta) i anticipativno

(A) Renta se prima neposredno i doživotno

$$ {}_{m}P(a_x) = \frac{N_x}{N_x - N_{x+m}} $$

$$ P = R \cdot {}_{m}P(a_x) $$

(B) Renta se prima posle k godina i doživotno

$$ {}_{m}P({}_{k/}a_x) = \frac{N_{x+k}}{N_x - N_{x+m}} $$

$$ P = R \cdot {}_{m}P({}_{k/}a_x) $$

(C) Renta se prima prvih n godina

$$ {}_{m}P({}_{/n}a_x) = \frac{N_x - N_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} $$

$$ P = R \cdot {}_{m}P({}_{/n}a_x) $$

(D) Renta se prima posle k godina, ali najviše n puta

$$ {}_{m}P({}_{k/n}a_x) = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{N_x - N_{x+m}} $$

$$ P = R \cdot {}_{m}P({}_{k/n}a_x) $$

4. Osiguranje kapitala uplatom mize

Osiguranje kapitala za slučaj smrti

(A) Doživotno

$$ A_x = \frac{M_x}{D_x} $$

$$ M = K \cdot A_x $$

(B) Odloženo

$$ {}_{k/}A_x = \frac{M_{x+k}}{D_x} $$

$$ M = K \cdot {}_{k/}A_x $$

(C) Privremeno

$$_{/n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$M = K \cdot {}_{/n}A_x$$

(D) Odloženo i privremeno

$$_{k/n}A_x = \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x}$$

$$M = K \cdot {}_{k/n}A_x$$

Osiguranje kapitala za slučaj doživljenja

$$_{/n}E_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$M = K \cdot {}_{/n}E_x$$

Mešovito osiguranje kapitala

$$A_{x,n} = {}_{/n}A_x + {}_{/n}E_x = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$M = K \cdot A_{x,n}$$

5. Osiguranje kapitala uplatom premije

Premija se plaća doživotno

(A) Neposredno osiguranje kapitala (bez uslova i ograničenja)

$$P(A_x) = \frac{M_x}{N_x} = \frac{A_x}{a_x}$$

$$P = K \cdot P(A_x)$$

(B) Odloženo osiguranje kapitala

$$P({}_{k/}A_x) = \frac{M_{x+k}}{N_x} = \frac{{}_{k/}A_x}{a_x}$$

$$P = K \cdot P({}_{k/}A_x)$$

Premija se plaća privremeno (m puta)

(A) Doživotno osiguranje kapitala za slučaj smrti (bez uslova i ograničenja)

$$ {}_{m}P(A_x) = \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} = \frac{A_x}{{}_{/m}a_x} $$

$$ \mathrm{P} = \mathrm{K} \cdot {}_{m}P(A_x) $$

(B) Privremeno osiguranje kapitala za slučaj smrti (na n godina)

$$ {}_{m}P({}_{/n}A_x) = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} = \frac{{}_{/n}A_x}{{}_{/m}a_x} $$

$$ \mathrm{P} = \mathrm{K} \cdot {}_{m}P({}_{/n}A_x) $$

(C) Privremeno osiguranje kapitala za slučaj doživljenja

$$ {}_{m}P({}_{/n}E_x) = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} = \frac{{}_{/n}E_x}{{}_{/m}a_x} $$

$$ \mathrm{P} = \mathrm{K} \cdot {}_{m}P({}_{/n}E_x) $$

(D) Mešovito osiguranje kapitala

$$ {}_{m}P(A_{x,n}) = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} = {}_{m}P({}_{/n}A_x) + {}_{m}P({}_{/n}E_x) $$

$$ \mathrm{P} = \mathrm{K} \cdot {}_{m}P(A_{x,n}) $$