REŠENJA ZADATAKA SA PISMENOG ISPITA IZ MATEMATIKE NA VPŠSS U NOVOM SADU 17.10.2008.

1. grupa

1. Proveriti da li je formula $F:\Big((p\vee q)\wedge(p\Rightarrow q)\Big)\Leftrightarrow\Big(\neg p\Big)$ tautologija
2. Pomoću inverzne matrice naći rešenja sistema jednačina

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 1\\ x_1 & +4\,x_2 & -2\,x_3 & = & 3\\ 2\,x_1 & -6\,x_2 & +4\,x_3 & = & 0\end{array}$$

3. Naći intervale monotonosti, ekstremne vrednosti i prevojne tačke funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-8x^2+63x+1$$

4. Izračunati integral $\int x\sin x\,dx$

5. Banka je klijentu odobrila potrošački kredit u iznosu od 250 000 dinara,uz učešće od 30% i otplatu duga u roku od 17 meseci po kamatnoj stopi od 16%. Odrediti ukupan dug i prosečnu mesečnu ratu.

REŠENJA:

1.

p	q	$p\vee q$	$p\Rightarrow q$	$(p\vee q)\wedge(p\Rightarrow q)$	$\neg p$	F
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$

Formula F nije tautologija.

2.

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 1\\ x_1 & +4\,x_2 & -2\,x_3 & = & 3\\ 2\,x_1 & -6\,x_2 & +4\,x_3 & = & 0\end{array}\Leftrightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&4&-2\\2&-6&4\end{bmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}}_{B}\Leftrightarrow A\cdot X=B\Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B$$

Kako je $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\cdot A^*$, to znači da je $X=\dfrac{1}{\det(A)}\cdot A^*\cdot B$ Da bismo odredili X potrebno je da izračunamo $\det(A)$ i A^*

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&4&-2\\2&-6&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&4&-2\\2&-6&4\end{vmatrix}\begin{matrix}1&-1\\1&4\\2&-6\end{matrix}=-2$$

$$A^*=\begin{bmatrix}A_{1,1}&A_{2,1}&A_{3,1}\\A_{1,2}&A_{2,2}&A_{3,2}\\A_{1,3}&A_{2,3}&A_{3,3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}4&-2\\-6&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-1&1\\-6&4\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}-1&1\\4&-2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&-2\\2&4\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\2&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\1&-2\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&4\\2&-6\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&-1\\2&-6\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&-1\\1&4\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-2&-2\\-8&2&3\\-14&4&5\end{bmatrix}$$

$$X=\frac{1}{\det(A)}\cdot A^*\cdot B=\frac{1}{-2}\cdot\begin{bmatrix}4&-2&-2\\-8&2&3\\-14&4&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

3.

Prvi izvod funkcije: $f'(x) = (\frac{1}{3}x^3 - 8x^2 + 63x + 1)' = x^2 - 16x + 63$

<u>Ekstremne vrednosti</u>: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 16x + 63 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 7 \vee x_2 = 9$

Kandidati za ekstremne vrednosti su prema tome $x_1 = 7$ i $x_2 = 9$. Da bismo proverili prirodu ekstrema potreban nam je drugi izvod funkcije: $f''(x) = (f'(x))' = (x^2 - 16x + 63)' = 2x - 16$

Prvo ispitujemo prirodu ekstrema u $x_1 = 7$

$f''(x_1) = f''(7) = 2 \cdot 7 - 16 = 14 - 16 = -2 < 0$ Znači da funkcija ima maksimum u tački $A_{max}(7, f(7))$.

Kako je $f(7) = \frac{1}{3} \cdot (7)^3 - 8 \cdot (7)^2 + 63 \cdot (7) + 1 = \frac{493}{3}$ onda je maksimum u $A_{max}(7, \frac{493}{3})$

Na isti način ispitujemo prirodu ekstrema u $x_2 = 9$

$f''(x_2) = f''(9) = 2 \cdot 9 - 16 = 18 - 16 = 2 > 0$ Znači da funkcija ima maksimum u tački $B_{min}(9, f(9))$. Kako je $f(9) = \frac{1}{3} \cdot (9)^3 - 8 \cdot (9)^2 + 63 \cdot (9) + 1 = 163$ onda je maksimum u $B_{min}(9, 163)$

<u>Intervali monotonosti</u>: Sa slike prvog izvoda funkcije možemo pročitati kada je prvi izvod pozitivan, a kada je negativan:

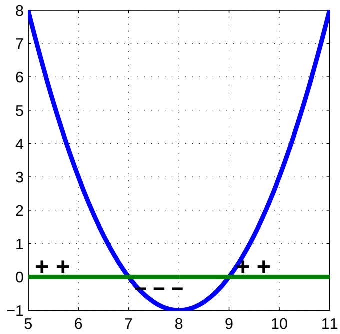
$f \nearrow \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 7) \cup (9, \infty)$

$f \searrow \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (7, 9)$

<u>Prevojne tačke</u>:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 16 = 0 \Leftrightarrow 2x = 16 \Leftrightarrow x = 8$, pa je prevojna tačka data sa $C(8, f(8))$

Pošto je $f(8) = \frac{1}{3} \cdot (8)^3 - 8 \cdot (8)^2 + 63 \cdot (8) + 1 = \frac{491}{3}$, onda je prevojna tačka $C(8, \frac{491}{3})$



4.

Zadati integral se rešava metodom parcijalne integracije ($\int u\,dv = uv - \int v\,du$):

$\int x \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x\, dx & \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$

5. Neka je $G = 250\,000$ iznos odobrenog krediita. Sa p_u ćemo označiti procenat učešća pa je $p_u = 30\%$. Označimo učešće sa U, dobijamo ga sledećim postupkom:

$$G : U = 100 : p_u \Leftrightarrow 250000 : U = 100 : 30 \Leftrightarrow U \cdot 100 = 250000 \cdot 30 \Leftrightarrow U = \frac{250000 \cdot 30}{100} = 75000$$

Iznos koji treba otplatiti u roku 17 meseci ($m = 17$) uz kamatu $p = 16\%$ je tada

$$K = G - U = 250000 - 75000 = 17500$$

Za određivanje ukupnog duga D i prosečne mesečne rate b nam je potreban kamatni koeficijent:

$$k = \frac{(m+1)p}{2400} = \frac{(17+1) \cdot 9}{2400} = 0,12$$

Ukupni dug je : $D = K \cdot (1 + k) = 175000 \cdot (1 + 0,12) = 196000$ din

prosečna mesečna rata je: $b = \frac{D}{m} = \frac{196000}{17} = 11\,529,41176471\ldots \approx 11\,529,41$ din

REŠENJA ZADATAKA SA PISMENOG ISPITA IZ MATEMATIKE NA VPŠSS U NOVOM SADU 17.10.2008.

$\boxed{\text{2. grupa}}$

1. Proveriti da li je formula $F : \Big((p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q)\Big) \Leftrightarrow \Big(\neg q\Big)$ tautologija
2. Pomoću inverzne matrice naći rešenja sistema jednačina

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -2\,x_2 & +x_3 & = & -4 \\ x_1 & +3\,x_2 & -2\,x_3 & = & 4 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 1 \end{array}$$

3. Naći intervale monotonosti, ekstremne vrednosti i prevojne tačke funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 21x + 1$$

4. Izračunati integral $\int x \cos x \, dx$
5. U prodavnici nameštaja kupcu je odobren potrošački kredit u iznosu od 96 000 dinara,uz učešće od 15% i otplatu duga u roku od 35 meseci po kamatnoj stopi od 10%. Odrediti ukupan dug i prosečnu mesečnu ratu.

REŠENJA:

1.

p	q	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$(p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q)$	$\neg q$	F
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Formula F nije tautologija.

2.

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -2\,x_2 & +x_3 & = & -4 \\ x_1 & +3\,x_2 & -2\,x_3 & = & 4 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 1 \end{array} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \Leftrightarrow A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

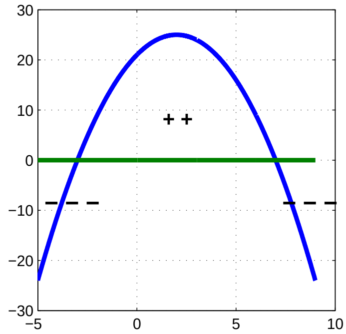
Kako je $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^*$, to znači da je $X = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^* \cdot B$ Da bismo odredili X potrebno je da izračunamo $\det(A)$ i A^*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ \searrow & \searrow & \searrow & & \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ \nearrow & \nearrow & \nearrow & & \\ - & - & - & & \end{array} = -1$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} \\ A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* \cdot B = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3.
Prvi izvod funkcije: $f'(x) = (-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 21x + 1)' = -x^2 + 4x + 21$
<u>Ekstremne vrednosti</u>: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 21 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3 \vee x_2 = 7$
Kandidati za ekstremne vrednosti su prema tome $x_1 = -3$ i $x_2 = 7$. Da bismo proverili prirodu ekstrema potreban nam je drugi izvod funkcije: $f''(x) = (f'(x))' = (-x^2 + 4x + 21)' = -2x + 4$
Prvo ispitujemo prirodu ekstrema u $x_1 = -3$
$f''(x_1) = f''(-3) = -2\cdot(-3)+4 = 6+4 = 10 > 0$ Znači da funkcija ima minimum u tački $A_{min}(-3, f(-3))$.
Kako je $f(-3) = -\frac{1}{3}\cdot(-3)^3 + 2\cdot(-3)^2 + 21\cdot(-3) + 1 = -35$ onda je minimumu $A_{min}(-3, -35)$
Na isti način ispitujemo prirodu ekstrema u $x_2 = 7$
$f''(x_2) = f''(7) = -2\cdot 7 + 4 = -14 + 4 = -10 < 0$ Znači da funkcija ima maksimum u tački $B_{max}(7, f(7))$.
Kako je $f(7) = -\frac{1}{3}\cdot 7^3 + 2\cdot 7^2 + 21\cdot 7 + 1 = \frac{395}{3}$ onda je maksimum u $B_{max}(7, \frac{395}{3})$
<u>Intervali monotonosti</u>: Sa slike prvog izvoda funkcije možemo pročitati kada je prvi izvod pozitivan, a kada je negativan:
$f \nearrow \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 7)$
$f \searrow \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (7, \infty)$
<u>Prevojne tačke</u>:
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$, pa je prevojna tačka data sa $C(2, f(2))$
Pošto je $f(2) = -\frac{1}{3}\cdot 2^3 + 2\cdot 2^2 + 21\cdot 2 + 1 = \frac{145}{3}$, onda je prevojna tačka $C(2, \frac{145}{3})$



4.
Zadati integral se rešava metodom parcijalne integracije ($\int u\,dv = uv - \int v\,du$):
$$\int x\cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x\,dx & \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right| = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$$

5. Neka je $G = 96\,000$ iznos odobrenog krediita. Sa p_u ćemo označiti procenat učešća pa je $p_u = 15\%$. Označimo učešće sa U, dobijamo ga sledećim postupkom:
$$G : U = 100 : p_u \Leftrightarrow 96000 : U = 100 : 15 \Leftrightarrow U\cdot 100 = 96000\cdot 15 \Leftrightarrow U = \frac{96000\cdot 15}{100} = 14400$$
Iznos koji treba otplatiti u roku 35 meseci ($m = 35$) uz kamatu $p = 15\%$ je tada
$$K = G - U = 96000 - 14400 = 81600$$
Za određivanje ukupnog duga D i prosečne mesečne rate b nam je potreban kamatni koeficijent:
$$k = \frac{(m+1)p}{2400} = \frac{(35+1)\cdot 9}{2400} = 0,15$$
Ukupni dug je : $D = K\cdot(1+k) = 81600\cdot(1+0,15) = 93840$ din

prosečna mesečna rata je: $b = \frac{D}{m} = \frac{93840}{35} = 2\,681,14285714\ldots \approx 2\,681,14$ din