



АКТУАРСТВО

Предавања 2

мр Наташа Папић-Благојевић

Израчунавање броја елементарних догађаја

- Користе се различита комбинаторна правила.
- У скупу који има n елемената, елементи скупа се могу разврстати на различите начине. Свака уређена n -торка елемената назива се *пермутација*.
- Уколико се елемент не понавља, говори се о *пермутацијама без понављања*:

$$P_n = n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

- Код *пермутација са понављањем*, неки елементи се понављају једном или више пута:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n - r)!}$$

У овом случају у скупу од n елемената бирамо само r елемената, где је $r < n$.

- Приликом формирања подскупова од r елемената из скупа од n елемената често занемарујемо њихов редослед и два подскупа сматрамо различитим само ако се они разликују у бар једном елементу. Тада одређујемо број комбинација r -класе од n елемената, применом формуле за комбинације без понављања:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- *Комбинације са понављањем* израчунавају се онда када се у појединим класама један елемент може појавити више пута:

$$\overline{C}_r^{n+r-1} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

Операције са догађајима

- Ако су A и B случајни догађаји тада важи:
- **Пресек догађаја** A и B у ознаци $A \cap B$ или $A * B$ је догађај који се реализује када се реализује и догађај A и догађај B . Случајни догађај се реализује ако и само ако се реализују и догађај A и догађај B .
Догађаји A и B су дисјунктни ако је \emptyset .
- **Унија догађаја** A и B у ознаци $A \cup B$ или $A + B$ је догађај који се реализује ако се реализује или догађај A или догађај B . Случајни догађај се реализује ако и само ако се реализује бар један од случајних догађаја A и B .
Ако је $A \cup B = \Omega$ и $A \cap B = \emptyset$ тада су догађај A и B супротни, односно комплементарни.
- **Разлика догађаја** A и B , у ознаци $A \setminus B$ је догађај који се реализује ако се реализује догађај A , а не реализује се догађај B .

Вероватноћа више догађаја

- Појам вероватноће више догађаја обухвата разне начине израчунавања вероватноће дешавања једног или више догађаја у скупу могућих догађаја.
- Догађаји могу да буду међусобно зависни или независни. Могуће је и да се међусобно искључују, дешавају истовремено или један после другог.

Условна вероватноћа

- У пракси се често јавља проблем одређивања вероватноће догађаја A , под условом да се реализовао догађај B .
- Такве вероватноће називамо *условним вероватноћама* и обележавамо их са $P(A/B)$, а читамо: вероватноћа догађаја A , под условом да се реализовао догађај B .
- **Дефиниција.** Нека су A и B догађаји. *Условна вероватноћа* догађаја A , под условом да се догађај B већ реализовао са позитивном вероватноћом означава се са $P(A|B)$ и дефинише се са:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

- **Дефиниција.** Нека су A и B два догађаја. Вероватноћа производа (или пресека) два догађаја може се добити помоћу условних вероватноћа:

$$P(AB) = P(BA) = P(A) P(B|A) = P(B) P(A|B)$$

Ова релација је позната као ***правило*** или ***закон множења вероватноћа*** и може се проширити и на више од два догађаја.

Збирна вероватноћа

- Вероватноћа збира два догађаја A и B једнака је збиру вероватноћа тих догађаја, умањеном за вероватноћу њиховог заједничког јављања.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Статистичка независност догађаја

- Један од основних појмова теорије вероватноће и математичке статистике јесте стохастичка или статистичка независност.
- **Дефиниција.** Нека су A и B два догађаја. За ове догађаје се каже да су *статистички независни* ако и само ако је вероватноћа њиховог производа једнака производу њихових вероватноћа:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

- Из правила множења вероватноћа такође произилази:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= P(A) \quad \text{ако је } P(B) > 0 \\ P(B|A) &= P(B) \quad \text{ако је } P(A) > 0. \end{aligned}$$

То значи да су два догађаја међу собом независна, ако јављање или нејављање једног догађаја нема утицаја на вероватноћу јављања другог догађаја.

Бајесова теорема

- Бајесовом теоремом се врши преиспитивање условне вероватноће применом расположивих информација уз обезбеђење процедура за одлучивање да ли тврдње о вероватноћи требају да буду усклађене са датим додатним информацијама или не.
- **Бајесова формула.** Нека су A_1, A_2, \dots, A_n , међусобно искључиви догађаји и нека је B неки други догађај. Вероватноћу догађаја A_i , када је дат догађај B , можемо наћи применом Бајесове теореме:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

- Именилац је према формули потпуне вероватноће једнак:

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k),$$

па се добија да је:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

- Бајесова формула се још назива и формула вероватноћа хипотеза (или узорака) јер на A_1, A_2, \dots, A_n , можемо гледати као на различите узорке који могу довести до реализације догађаја B . Ако се догађај B реализовао, интересује нас колика је вероватноћа да је у питању неки одређени узорак A_i тј. колико је $P(A_i|B)$.

Литература:

1. Жижих, М., Ловрић, М. и Павличих, Д. (1999) *Методи статистичке анализе*, Економски факултет Београд, Београд.
2. Ивковић, З. (1992), *Математичка статистика*, Научна књига, Београд.
3. Папић-Благојевић, Н. (2010) *Бајесов метод оцењивања*, магистарска теза, Економски факултет Београд, Београд.
4. Рачић, С. и Савковић, М. (2004) *Статистика*, Виша пословна школа, Нови Сад.