АКТУАРСТВО

- Формуле -

мр Наташа Папић-Благојевић

1. Теорија вероватноће

Класична дефиниција вероватноће

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$$0 \le P(A) \le 1$$

Емпиријска вероватноћа

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{f_i}{N}$$

Пермутације

- без понављања

$$P_n = n!$$

- са понављањем

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Комбинације

- без понављања

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

- са понављањем

$$\bar{C}_r^{n+r-1} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$$

Условна вероватноћа

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \qquad P(B) > 0$$

Правило или ***закон множења вероватноћа***

$$P(AB) = P(BA) = P(A)\,P(B|A) = P(B)\,P(A|B)$$

Збирна вероватноћа

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Статистичка независност догађаја

$P(AB) = P(A)P(B)$

$P(A|B) = P(A)$ ако је $P(B) > 0$

$P(B|A) = P(B)$ ако је $P(A) > 0$

Бајесова формула

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

2. Осигурање живота

Вероватноћа живота и смрти једног лица

$l_x > l_{x+1} > l_{x+2} > ... > l_{x+n}$

$d_x = l_x - l_{x+1} \Rightarrow l_{x+1} = l_x - d_x$

- вероватноћа да ће лице старо x година доживети $(x+k)$ година

  $_kp_x = \frac{l_{x+k}}{l_x}$

- вероватноћа да ће лице старо x година доживети $(x+n)$ година

  $_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$

- вероватноћа да лице старо x година неће доживети $x+1$ годину

  $q_x = 1 - p_x$

  $p_x + q_x = 1$

- вероватноћа да лице старо x година неће доживети $x+n$ година

  $$_{|n}q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

  $$_{|n}q_x = 1 - {}_np_x$$

  $$_np_x + {}_{|n}q_x = 1$$

- број чланова групе лица старости x година који ће вероватно живети после k година

$$G = \sum G \cdot_k p_x = \sum G \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

Вероватно трајање живота

$$\frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{1}{2} => l_{x+k} = \frac{l_x}{2}$$

Средње трајање живота

- прва варијанта (почетком године)

$$e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} \dots}{l_x}$$

- друга варијанта (крајем године)

$$e'_x = \frac{l_x + l_{x+1} + l_{x+2} \dots}{l_x} = 1 + e_x$$

- аритметичка средина прве и друге варијанте

$$e_x^0 = \frac{e_x + e_x'}{2} = \frac{e_x + 1 + e_x}{2} = \frac{1}{2} + e_x$$

<u>Осигурање личне ренте уплатом мизе</u>

1. Непосредна доживотна рента

а) *Антиципативна рента*

$$a_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$M = R \cdot a_x$$

б) *Декурзивна рента*

$$a_x' = \frac{N_x - D_x}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} - 1 = a_x - 1 = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$M = R \cdot a_x'$$

2. Одложена доживотна рента

а) *Антиципативна рента*

$${}_{k|}a_x = \frac{N_{x+k}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_{k|}a_x$$

б) *Декурзивна рента*

$$_{k|}a_x^{'} = \frac{N_{x+k+1}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_{k|}\,a_x^{'}$$

3. Непосредна привремена рента

а) *Антиципативна рента*

$$_{|n}a_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_{|n}\,a_x$$

б) *Декурзивна рента*

$$_{|n}a_x^{'} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_{|n}\,a_x^{'}$$

4. Одложена привремена рента

а) *Антиципативна рента*

$$_{k|n}a_x = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_{k|n}\,a_x$$

б) *Декурзивна рента*

$$_{k|n}a_x^{'} = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_{k|n}\,a_x^{'}$$

<u>Осигурање личне ренте уплатом премије</u>

1. Премија се плаћа доживотно

а) *Рента се прима непосредно и доживотно*

- *Антиципативна рента*

  $$P(a_x) = 1 => P = R \cdot P(a_x) = R$$

- *Декурзивна рента*

  $$P(a'_x) = 1 - \frac{D_x}{N_x} = 1 - \frac{1}{a_x}$$

  $$P = R \cdot P(a'_x)$$

б) *Рента се прима одложено и доживотно* (*антиципативно*)

$$P({}_{k|}a_x) = \frac{N_{x+k}}{N_x}$$

$$P = R \cdot P({}_{k|}a_x)$$

2. Премија се плаћа привремено (највише *m* пута) и антиципативно

а) *Рента се прима непосредно и доживотно*

$$_{m}P(a_x) = \frac{N_x}{N_x - N_{x+m}}$$

$$P = R \cdot {}_{m}P(a_x)$$

б) *Рента се прима после* k *година и доживотно*

$$_{m}P({}_{k|}a_x) = \frac{N_{x+k}}{N_x - N_{x+m}}$$

$$P = R \cdot {}_{m}P({}_{k|}a_x)$$

в) *Рента се прима првих* n *година*

$$_{m}P({}_{|n}a_x) = \frac{N_x - N_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

$$P = R \cdot {}_{m}P({}_{|n}a_x)$$

г) *Рента се прима после* k *година, али највише* n *пута*

$$_{m}P({}_{k|n}a_x) = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

$$P = R \cdot {}_{m}P({}_{k|n}a_x)$$

<u>Осигурање капитала уплатом мизе</u>

1. Осигурање капитала за случај смрти

а) *Доживотно осигурање капитала за случај смрти*

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

$$M = K \cdot A_x$$

б) *Одложено осигурање капитала за случај смрти*

$$_{k|}A_x = \frac{M_{x+k}}{D_x}$$

$$M = K \cdot {}_{k|}A_x$$

в) *Привремено осигурање за случај смрти*

$$_{|n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$M = K \cdot {}_{|n}A_x$$

г) *Одложено и привремено осигурање за случај смрти*

$$_{k|n}A_x = \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x}$$

$$M = K \cdot {}_{k|n}A_x$$

2. Осигурање капитала за случај доживљења

$$_{|n}E_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$M = K \cdot {}_{|n}E_x$$

3. Мешовито осигурање

$$A_{x,n} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x,n} = {}_{|n}A + {}_{|n}E_x$$

$$M = K \cdot A_{x,n}$$

Осигурање капитала уплатом годишње премије

1. Премија се плаћа доживотно

а) *Непосредно осигурање капитала (без услова и ограничења)*

$$P(A_x) = \frac{M_x}{N_x} = \frac{A_x}{a_x}$$

$$P = K \cdot P(A_x)$$

б) *Одложено осигурање капитала*

$$P({}_{k|}A_x) = \frac{M_{x+k}}{N_x} = \frac{{}_{k|}A_x}{a_x}$$

$$P = K \cdot P({}_{k|}A_x)$$

2. Премија се плаћа привремено

а) *Доживотно осигурање капитала за случај смрти*

$${}_mP(A_x) = \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} = \frac{A_x}{{}_{|m}a_x}$$

$$P = K \cdot {}_mP(A_x)$$

б) *Привремено осигурање капитала за случај смрти* (*на n година*)

$${}_mP({}_{|n}A_x) = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} = \frac{{}_{|n}A_x}{{}_{|m}a_x}$$

$$P = K \cdot {}_mP({}_{|n}A_x)$$

в) *Привремено осигурање капитала за случај доживљења*

$$ {}_mP({}_{|n}E_x) = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} = \frac{{}_{|n}E_x}{{}_{|m}a_x} $$

$$ P = K \cdot {}_m P({}_{|n}E_x) $$

г) *Мешовито осигурање капитала*

$$ {}_mP(A_{x,n}) = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} = {}_m P({}_{|n}A_x) + {}_m P({}_{|n}E_x) $$

$$ P = K \cdot {}_m P(A_{x,n}) $$

<u>Осигурање капитала уплатом месечне премије</u>

1. **Премија се плаћа доживотно**

   а) *Непосредно осигурање капитала (без услова и ограничења)*

$$ P^m(A_x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{M_x}{N_x} \cdot r $$

$$ P^m = K \cdot P^m(A_x) $$

   б) *Одложено осигурање капитала*

$$ P^m({}_{k|}A_x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{M_{x+k}}{N_x} \cdot r $$

$$ P^m = K \cdot P^m({}_{k|}A_x) $$

2. **Премија се плаћа привремено**

   а) *Доживотно осигурање капитала за случај смрти*

$$ {}_mP^m(A_x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} \cdot r $$

$$ P^m = K \cdot {}_m P^m(A_x) $$

б) *Привремено осигурање капитала за случај смрти* (*на* n *година*)

$$ {}_{m}P^{m}({}_{|n}A_{x}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{M_{x} - M_{x+n}}{N_{x} - N_{x+m}} \cdot r $$

$$ P^{m} = K \cdot {}_{m}P^{m}({}_{|n}A_{x}) $$

в) *Привремено осигурање капитала за случај доживљења*

$$ {}_{m}P^{m}({}_{|n}E_{x}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{D_{x+n}}{N_{x} - N_{x+m}} \cdot r $$

$$ P^{m} = K \cdot {}_{m}P^{m}({}_{|n}E_{x}) $$

г) *Мешовито осигурање капитала*

$$ {}_{m}P^{m}(A_{x,n}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{M_{x} - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_{x} - N_{x+m}} \cdot r $$

$$ P^{m} = K \cdot {}_{m}P^{m}(A_{x,n}) $$

3. Математичке резерве

Нето методе

1. Књиговодствена метода

$$ {}_{t+1}V_{x} = \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}}({}_{t}V_{x} + P_{x}) - \frac{C_{x+t}}{D_{x+t+1}} $$

2. Ретроспективна метода

$$ {}_{t}V_{x} = \frac{P_{x} \cdot (N_{x} - N_{x+t}) - (M_{x} - M_{x+t})}{D_{x+t}} $$

3. **Проспективна метода**

$$ {}_tV_x = \frac{M_{x+t} - P_x \cdot N_{x+t}}{D_{x+t}} $$

4. **Ретроспективна метода за мешовито осигурање**

$$ {}_tV_x = \left(P_{x,n]} \cdot a_{x,t]} - A_{x,t]}\right) \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}} $$

$$ P_{x,n]} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} $$

$$ a_{x,t]} = \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x} $$

$$ A_{x,t]} = \frac{M_x - M_{x+t}}{D_x} $$

5. **Проспективна метода за мешовито осигурање**

$$ {}_tV_x = A_{x+t,n-t]} - P_{x,n]} \cdot a_{x+t,n-t]} $$

$$ A_{x+t,n-t]} = \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}} $$

$$ P_{x,n]} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} $$

$$ a_{x+t,n-t]} = \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} $$

Бруто методе

Годишња премија за мешовито осигурање:

$$P_{x,n]} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Вредност свих премија које ће доспети у току *n* година:

$$a_{x,n]} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Садашња вредност свих отплата:

$$\alpha \cdot a_{x,n]}$$