2014

Математичке резерве

Испитни део за предмет Актуарство

Мр Наташа Папић Благојевић
Мсц Весна Кочић Вугделија
Висока пословна школа струковних студија у Новом Саду

Садржај

1. Дефинисање премијске (математичке) резерве

Премијска (математичка) резерва, у одређеном тренутку, представља разлику између обавеза осигуравајућег друштва и обавеза осигураника.

ПРЕМИЈСКЕ РЕЗЕРВЕ =
ОБАВЕЗЕ ОСИГУРАВАЈУЋЕГ ДРУШТВА – ОБАВЕЗЕ ОСИГУРАНИКА

У сврху израчунавања премијске резерве потребно је све уплате осигураника (будуће обавезе осигуравајућег друштва) и све исплате осигуравајућег друштва (обавезе осигураника) свести на исти временски рок, тј. тренутак.

Основу оцене математичких резерви чине комутативни бројеви, израчунати на основу таблица смртности.

Да би се схватио појам премијске резерве, неопходно је направити разлику између природне премије, ризико премије, штедне премије и ризико-осигуране суме, због тога што се често не уочава разлика између наведених врста премија.

Осигурање живота са *природном премијом* заправо представља осигурање на једну годину, које се закључује сваке године и то увек са другом премијом која се израчунава на основу старости осигураника. То значи да осигураник увек плаћа премију чија висина зависи од његових година старости, па је ризик смрти увек осигуран на једну годину. Из тог разлога се и каже да је природна премија заправо ризико премија за једну годину, односно премија за ризико – осигурања на једну годину. Природна премија расте са бројем година старости, па је значајна разлика у висини ове премије између почетка и завршетка периода плаћања.

Иако је примена природне премије математички оправдана, сматра се да је непрактична, па се у пракси израчунава *просечна премија* која је иста за цело трајање осигурања. Просечна премија је увек изражена за читав низ година у једном, обично сталном износу, било са доживотним или привременим плаћањем. За разлику од природне премије која је у првим годинама осигурања значајно нижа у односу на касније године осигурања, просечна премија је виша у првим, а нижа у каснијим годинама трајања осигурања.

Пошто се због просечне премије увек у првим годинама осигурања наплаћује виша премија, следи да се нето премија (***NP***) састоји из ризико премије и штедне премије.

Штедна премија је онај део премије који се издваја из године у годину из наплаћене премије у виду фонда који служи за покриће будућих обавеза осигуравајуће компаније. Образовањем штедне премије осигуравајућа компанија не сноси више ризик на целу осигурану суму, већ само на разлику између осигуране суме и штедне премије.

Ризико премија је разлика између укупне нето премије и штедне премије. Ризико премија је природна премија за ризико осигурани капитал.

Осигуравајућа компанија од наплаћене нето премије користи само ризико премију за покриће ризика, а штедну премију одваја на штедњу уз камату. Стога се може рећи да је математичка (премијска) резерва у одређеном тренутку заправо збир до тог момента укамаћених доспелих штедних премија.

Обрачун математичке резерве врши се крајем сваке пословне године. Постоји више метода за обрачун математичке резерве.

Разликујемо ***индивидуалне*** и ***групне*** оцене математичких резерви. Ми ћемо се бавити искључиво индивидуалним методама обрачуна математичких резерви.

Индивидуалне методе оцене математичких резерви можемо користити у варијантама нето и бруто премије, па у том смислу разликујемо:

1. ***Нето методе*** оцене, које не подразумевају укључивање трошкова пословања осигуравајућег друштва, што за последицу може имати губитак за осигуравајуће друштво, и
2. ***Бруто методе***, које поред таблица смртности и каматне стопе уважавају и трошкове осигуравајућег друштва.

Групне методе оцене математичке резерве могу бити:

1. ***Групне методе у ужем смислу***, код којих коначни резултати одговарају вредностима добијеним применом индивидуалних метода, и
2. ***Приближне методе***, код којих коначни резултати нису једнаки вредностима добијеним применом индивидуалних метода, али су одступања незнатна.

2. Нето методи

Разликујемо три нето метода оцене математичких резерви:

1. Књиговодствени метод;
2. Ретроспективни метод и

3. Проспективни метод.

2.1. *Књиговодствени метод*

Књиговодствено посматрано, премијска резерва представља разлику између осигураникових уплата и осигуравачевих исплата, под претпоставком да су све доспеле уплате у обрачунској години наплаћене и да су све осигураникове исплате извршене онако како је то предвиђено таблицама смртности.

Ако се стање математичке резерве крајем посматране пословне године добија тако да се и салдо претходне године и њему додате математичке премије заједно укапиталишу са истом каматном стопом са којом су рађени и комутативни бројеви, па се од добијене суме одузму све исплате, онда се каже да је реч о књиговодственом методу оцене и обрачуна математичке резерве.

За овакав приступ оцени и обрачуну математичких резерви потребне су следеће ознаке:

$_{t-1}V_x$ – Индивидуална математичка резерва из претходне године;
$_{t}V_x$ – Индивидуална математичка резерва у текућој години;
l_{x+t-1} – Број живих лица у претходној години;
l_{x+t} – Број живих лица у текућој години;
d_{x+t-1}– Број умрлих лица у текућој години;
t – Број година које су протекле од почетка осигурања до године обрачуна математичке резерве;
P_x – Просечна годишња премија за једно лице, за једну јединицу капитала;
$l_{x+t-1} \times P_x$ – Укупна премија у претходној години;
$l_{x+t} \times P_x$ – Укупна премија у текућој години;
$l_{x+t-1} \times {}_{t-1}V_x$ – Укупна математичка резерва у претходној години и
$l_{x+t} \times {}_{t}V_x$ – Укупна математичка резерва у текућој години.

На основу тих података добијамо:

$(1/r \times {}_{t}V_x - {}_{t-1}V_x)$ – Штедни део премије, односно део који се издваја за математичке резерве;
$1/r \times q_{x+t-1} \times (1 - {}_{t}V_x)$ – Ризико премију, односно део који се издваја за исплате штета насталих у текућој години.

Штедни део премије у збиру са ризико премијом дају просечну годишњу премију за једно лице, за једну јединицу капитала:

$$P_x = (1/r \times {}_tV_x - {}_{t-1}V_x) + 1/r \times q_{x+t-1} \times ({}_{1-t}V_x)$$

<u>Објашњење</u>:

Ако претпоставимо да је дата резерва ${}_{t-1}V_x$, она може да послужи за израчунавање ${}_tV_x$. Како l_{x+t-1} представља број живих лица после t-1 година од дана осигурања када је осигурању приступило l_x лица. После t-1 година њихова резерва ће износити $l_{x+t-1} \times {}_{t-1}V_x$.

Како је $l_{x+t-1} \times P_x$ износ нето премије коју ће l_{x+t-1} лица платити у току t-те године, збир резерве и ове плаћене нето премије износи:

$$l_{x+t-1} \times {}_{t-1}V_x + l_{x+t-1} \times P_x$$

Пошто осигуравајуће друштво зарачунава и камату, тај износ (укамаћен) ће до краја t-те године бити:

$$(l_{x+t-1} \times {}_{t-1}V_x + l_{x+t-1} \times P_x) \times r = l_{x+t-1} \times ({}_{t-1}V_x + P_x) \times r$$

Осигуравајуће друштво у току t-те године мора регулисати обавезе које су последица чињенице да је у току t-те године умрло d_{x+t-1} људи, па ће резерва после t година од дана осигурања бити:

$$l_{x+t} \times {}_tV_x = l_{x+t-1} \times ({}_{t-1}V_x + Px) \times r - d_{x+t-1}$$

Да би могли израчунати резерве за l_{x+t} жива лица користећи комутативне бројеве, у претходном изразу ћемо извршити одговарајућа проширења, па ћемо добити:

$${}_tV_x = \frac{D_{x+t-1}}{D_{x+t}} \times ({}_{t-1}V_x + Px) - \frac{C_{x+t-1}}{D_{x+t}}$$

По аналогији можемо одредити и резерву ${}_{t+1}V_x$. Препоставимо да је осигурање уговорило l_x лица, при чему је после t година од дана осигурања живо још l_{x+t} лица, па је $l_{x+t} \times {}_tV_x$ њихова резерва. Ова резерва се у текућој години повећава за нето премију коју уплате преостали осигураници, тј увећава се за $l_{x+t} \times P_x$, тако да збир износи:

$$l_{x+t} \times {}_tV_x + l_{x+t} \times P_x = ({}_tV_x + P_x) \times l_{x+t}$$

До краја године, овом износу се додаје и припадајућа камата па ћемо имати:

$$l_{x+t} \times {}_tV_x + l_{x+t} \times P_x = ({}_tV_x + P_x) \times l_{x+t} \times r$$

Даље, осигуравајуће друштво мора извршити обавезе проистекле из чињенице да у текућој, (t+1)-тој години, умре одређени број лица, па ће претходно израчунате резерве, умањене за ове исплате бити:

$$l_{x+t+1} \times {}_{t+1}V_x = l_{x+t} \times ({}_tV_x + P_x) \times r - d_{x+t}$$

односно:

$${}_{t+1}V_x = \frac{l_{x+t}}{l_{x+t+1}} \times ({}_tV_x + P_x) \times r - \frac{d_{x+t}}{l_{x+t+1}}$$

Проширивањем разломка добија се крајња формула за израчунавање резерви за l_{x+t+1} живо лице:

$${}_{t+1}V_x = \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} \times ({}_tV_x + P_x) - \frac{C_{x+t}}{D_{x+t+1}}$$

Ова формула се обично користи за оцену и обрачун резерве са промењљивом премијом и назива се ***рекурзивна формула***.

Пример 1:

Осигурано је лице старо 35 година, доживотно, за случај смрти. Премијска резерва после 6 година износи 66‰. Колико износи ${}_7V_{35}$?

Решење:

$x = 35$
$t = 6$
${}_6V_{35} = 66$

$${}_{t+1}V_x = \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} \times ({}_tV_x + P_x) - \frac{C_{x+t}}{D_{x+t+1}}$$

$$P_{35} = \frac{M_{35}}{N_{35}} = \frac{7127{,}86}{358785{,}45} = 0{,}019866636 = 19{,}87‰$$

$$_{7}V_{35} = \frac{D_{41}}{D_{42}} \times ({}_{6}V_{35} + P_{35}) - \frac{C_{41}}{D_{42}} = \frac{15589{,}23}{14830{,}58} \times (0{,}066 + 0{,}019866636) - \frac{159{,}06}{14830{,}58} =$$

0,09025909 – 0,01072513 = 0,0795339589

Одговор: Резерве за 7. годину осигурања за лице старо 35 година износе 79,534‰ осигуране суме.

2.2. *Ретроспективни метод*

Премијску резерву, према овом методу, можемо дефинисати као разлику свих досадашњих осигураникових уплата и свих досадашњих исплата осигуравајућег друштва, сведено на рок, тј. тренутак, време, у ком тражимо премијску резерву. Ова метода даје премијску резерву помоћу података за протекло време од дана осигурања до дана тражења премијске резерве.

Пођимо од доживотног осигурања за случај смрти са доживотним плаћањем премије за осигурано лице старости x година. Обрачун се врши после t година од дана уговарања осигурања, при чему ћемо користити ознаку $\mathbf{P_x}$ за нето премију.

На почетку осигурања, вредност свих премија које ће доспети или су доспеле у току t година износи $\mathbf{a_{x,t\urcorner}}$. То је израз који представља садашњу вредност једнократне премије (мизе) за личну ренту од 1 динар, за време трајања живота осигураног лица у току t година ($\mathbf{a_{x,t\urcorner} = {}_{|n}a_x}$).

$\mathbf{A_{x,t\urcorner}}$ представља једнократну премију (мизу) за привремено осигурање капитала за случај смрти кроз t година ($\mathbf{A_{x,n\urcorner} = {}_{|n}a_x}$).

$\mathbf{A^1_{x,n} = {}_{|n}E_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}}$ је једнократна премија (миза) за осигурање једног динара капитала за случај доживљења.

$\mathbf{P_x \times a_{x,t\urcorner}}$ и $\mathbf{A_{x,t\urcorner}}$ су познате вредности у тренутку закључивања осигурања, а ове вредности су потребне после t година, тј. у моменту оцене и обрачуна резерве.

Поставља се питање како израчунати осигурани капитал за случај доживљења, ако је позната једнократна премија (миза) која износи 1 динар? Уз премију $\mathbf{D_{x+n}/D_x}$ осигуран је капитал од 1 динар. Уз премију од 1 динар осигуран је капитал од K динара. Уз ове претпоставке је могуће поставити следећу пропорцију:

$$\frac{D_{x+n}}{D_x} : 1 = 1 : K \Rightarrow K = \frac{D_x}{D_{x+n}}$$

Закључујемо да у току n година, износ од једног динара, осигуравајући-технички, нарасте на D_x/D_{x+n} динара, па се због тога наведени израз и назива ***осигуравајући технички фактор***. У складу са овим закључком, констатујемо да ће после t година износи $P_x \times a_{x,t\urcorner}$ имати следеће вредности:

$$P_x \times a_{x,t\urcorner} = \frac{D_{x+t}}{D_x} \quad ; \quad A_{x,t\urcorner} = \frac{D_x}{D_{x+t}}$$

Њихова разлика представља премијску (математичку) резерву:

$${}_tV_x = \quad (P_x \times a_{x,t\urcorner}) - A_{x,t\urcorner} \times \frac{D_x}{D_{x+t}}$$

Ако у ову формулу уврстимо и комутативне бројеве добићемо:

$${}_tV_x = \frac{P_x \times (N_x - N_{x+t}) - (M_x - M_{x+t})}{D_{x+t}}$$

У овој формули ${}_tV_x$ представља разлику дисконтованих уплата и исплата насталих у периоду у коме је осигурано лице било старо x година до момента када је ово лице постало старо x+t година. Користећи ову формулу можемо израчунати и индивидуалне математичке резерве за следеће врсте осигурања:

- За случај смрти, са доживотним плаћањем годишњих премија;
- За случај смрти са привременим плаћањем премија;
- За привремено осигурање и
- За мешовито осигурање (за случај смрти и за случај доживљења).

Пример 2:

Осигурано је лице старо 35 година. Колико ће износити премијска резерва после 6 година?

Решење:

x = 35

$t = 6$

$$_{t}V_{x} = \frac{P_{x} \times (N_{x} - N_{x+t}) - (M_{x} - M_{x+t})}{D_{x+t}}$$

$$_{6}V_{35} = \frac{P_{35} \times (N_{35} - N_{41}) - (M_{35} - M_{41})}{D_{41}}$$

$_{6}V_{35} = 0{,}748558$

Одговор: Резерве за лице старо 35 година након 6 година од дана осигурања износиће 74,856‰ осигуране суме.

2.3. *Проспективни метод*

Према овом методу, премијска (математичка) резерва у одређеном моменту треба да буде једнака разлици вредности свих будућих исплата и свих будућих уплата (премија) у том моменту. Другим речима, очекивана „садашња" вредност будућих расхода умањена за очекивану „садашњу" вредност будућих прихода даје ***проспективну вредност полисе осигурања***. Ова метода даје премијску резерву помоћу података из будућности.

$\mathbf{A_{x,t}}$ је ознака за вредност једнократне премије (мизе);

$\mathbf{P_{x} \times a_{x,t}}$ је производ нето премије и доживотне ренте за лице старо x+t година и представља вредност будућих уплата. Ако је l_x лица старости x година осигурано за случај смрти са једнаким годишњим премијама P_x и са доживотним плаћањем, онда ће после t година премијска резерва износити:

$$\mathbf{_{t}V_{x} = A_{x+t} - P_{x} \times a_{x+t}}$$

при чему је $\mathbf{A_{x+t}}$ ознака за дисконтовану вредност једног динара осигураног капитала после t година, а $\mathbf{P_{x} \times a_{x+t}}$ ознака за дисконтовану вредност свих годишњих премија које лице старо x+t година треба да плати осигуравачу до краја осигурања.

Ако у формулу уврстимо и комутативне бројеве, добићемо следећи израз:

$$\mathbf{_{t}V_{x} = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - P_{x} \times \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} = \frac{M_{x+t} - P_{x} \times N_{x+t}}{D_{x+t}}}$$

Пример 3:

Осигурано је лице старо 35 година. Колико износи премијска резерва после 6 година?

Решење:

$x = 35$
$t = 6$

$${}_{6}V_{35} = \frac{M_{41}}{D_{41}} - P_{35} \times \frac{N_{41}}{D_{41}} = 0,0748558$$

Одговор: Премијска резерва за лице старо 35 година ће после 6 година од дана осигурања износити 74,856‰ осигуране суме.

Можемо приметити да су резултати код претходна два метода обрачуна уствари исти, само им је коначни облик формуле другачији.

У претходно приказаним поступцима обрачуна премијске резерве било је речи само о доживотном осигурању за случај смрти. Ако би смо премијску резерву желели израчунати за мешовито осигурање по нето ретроспективном методу, уместо P_x уврстили би $\mathbf{P_{x\overline{n|}}}$, тј. годишњу премију за мешовито осигурање, па би добили формулу:

$$\mathbf{{}_{t}V_{x} = (P_{x\overline{n|}} \times a_{x,\overline{t|}} - A_{x,\overline{t|}}) \times \frac{D_{x}}{D_{x+t}}}$$

Где је:

$$\mathbf{P_{x,\overline{n|}} = \frac{M_{x} - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_{x} - N_{x+n}}}$$

Пример 4:

Лице старо 35 година закључује уговор о мешовитом осигурању капитала од 100.000 динара на 20 година. Колико ће износити премијска резерва после 6 година трајања осигурања?

Решење:

$x = 35$
$t = 6$

$$ {}_6V_{35} = (P_{35,\overline{20|}} \times a_{35,\overline{6|}} - A_{35,\overline{6|}}) \times \frac{D_{35}}{D_{41}} $$

$a_{35,\overline{6|}} = 5{,}32913419$

$A_{35,\overline{6|}} = 0{,}050110143$

${}_6V_{35} = 0{,}2103077$

Одоговор: Премијска резерва ће 6 година након потписивања полисе за лице старо 35 година износити 21,031% осигуране суме, тј. 21030,77 динара.

По проспективном методу, за исти пример, резерву можемо израчунати путем формуле:

$$ {}_tV_x = A_{x+t,\overline{n-t|}} - P_{x,\overline{n|}} \times a_{x+t,\overline{n-t|}} $$

при чему $A_{x+t,\overline{n-t|}}$ представља једнократну премију којом би се ово осигурање могло купити. Ова вредност је једнака садашњој вредности будућих исплата.

$P_{x,\overline{n|}} \times a_{x+t,\overline{n-t|}}$ је садашња вредност будућих уплата. Резултат ће бити исти као у претходно израчунатом примеру.

3. Бруто методи

Нето методи обрачуна премијске резерве не укључују трошкове осигуравача око администрације и прибављања осигурања па, самим тим, служе за покриће ризика у посматраној години и за премијску резерву.

Уколико би осигуравајуће компаније обрачунале премије на основу таблица смртности и каматне стопе, не би имале покриће за своје трошкове, односно радиле би са губитком. Из тог разлога, неопходно је да осигуравајуће компаније увећају нето премије за одређени износ, како би се премијама могли покрити и трошкови осигурања. Нето премија увећана за трошкове осигурања назива се *бруто премија*.

Да би се избегли евентуални финансијски губици, за обрачун премијских резерви се користи тзв. ***бруто систем***, који подразумева коришћење таблица смртности и каматне стопе, али укључује и трошкове осигурања.

Трошкови осигурања су у првој години већи од трошкова у следећим годинама, изузев ако се ради о осигурању уплатом мизе.

3.1. *Трошкови осигуравајућег друштва који увећавају нето премију*

У ове трошкове спадају:

1. Трошкови прибављања осигурања или аквизициони трошкови који се обележавају са знаком **δ**;
2. Административни (управни) трошкови, који се обележавају знаком **β** и
3. Трошкови наплате премија или инкасо трошкови, који се обележавају знаком **γ**.

Аквизициони трошкови (**δ**) или ***први трошкови*** углавном садрже провизију закључка. Ту провизију добијају аквизитери тј. прибављачи осигурања.

Аквизициони трошкови се исплаћују у току прве године осигурања, па самим тим већим делом падају на терет нових, али и старих осигураника. С обзиром на то, ови трошкови свако новоотворено осигуравајуће друштво стављају у тешку финансијску ситуацију, па је њихова калкулација у резервама веома важна. У ове трошкове спадају:

- путни трошкови,
- трошкови аквизитера,
- лекарски хонорари,
- провизије закључивања уговора, итд.

На висину аквизиционих трошкова утичу многи фактори, од којих су најзначајнији:

- способност аквизитера,
- број прибављених (склопљених) послова,
- форма осигурања,
- услови под којима аквизитер ради,
- развијеност осигуравајућег друштва, итд.

Уобичајено је да ови трошкови износе 10-30‰ осигуране суме или 30-70‰ годишње премије. Аквизициони трошкови представљају значајну ставку за осигуравајуће друштво, па се нето премија повећава за износ ових трошкова. Практично, тиме се осигураницима обрачунава бруто премија.

Пример 5:

Лице старо 35 година осигурава се на 30 година по форми мешовитог осигурања. Годишња премија за ово осигурање ће бити:

$$P_{35,30\urcorner} = \frac{M_{35} - M_{65} + D_{65}}{N_{35} - N_{65}} \; 0,025632543,$$

односно, 25,63‰ осигуране суме.

Из ове премије се не могу покрити и трошкови, па се мора увећати. Нека су аквизициони трошкови у овом случају 3% (или 30‰) осигуране суме. У том случају, прва премија ће износити 55,63‰ осигуране суме. За осигураника је ово веће оптерећење, па осигуравајућа друштва овај трошак расподељују осигураницима на цео период осигурања. Значи да ће осигураници, умето уплате једнократног износа од 30‰, уплаћивати годишње износе **α**.

Садашња вредност свих отплата, ако се уплаћују почетком сваке од n година, износиће:

$$\boldsymbol{\alpha \times a_{x,n\urcorner}}$$

У овом примеру, садашња вредност износи 30, па ће бити:

$\boldsymbol{\alpha \times a_{x,n\urcorner} = 30 \Rightarrow \alpha = 30/a_{x,n\urcorner}}$

Конкретно: $\alpha = 30/\ 15,60206228 = 1,92282273$‰ осигуране суме.

Дакле, да би осигуравајуће друштво могло да покрије аквизиционе трошкове, потребно је нето премију увећати за 1,923‰ осигуране суме, па ће нови износ премије бити:

$$25,632543 + 1,922823 = 27,555‰ \text{ осигуране суме}$$

Управни (административни) трошкови (**β**) садрже:

1. оснивачке и организационе трошкове;
2. трошкове инвентара;
3. дохотке запослених;
4. канцеларијске трошкове;
5. порезе и др.

Висина административних трошкова утврђује се пословном политиком осигуравача и ствар је процене његовог менаџмента.

Уобичајено је да ови трошкови износе 2-3‰ осигуране суме. Ако претпоставимо да у датом примеру ови трошкови износе 2‰ осигуране суме годишње, онда нова вредност премије износи:

27,555‰ + 2‰ = 29,555‰ осигуране суме.

Тај проценат (изражен у промилима) још није коначан износ бруто премије, јер треба укључити и инкасо трошкове.

***Инкасо трошкови* (γ)** највећим делом садрже инкасо провизије и плате инкасаната.

Осигуравајуће компаније у великим градовима имају своје плаћене инкасанте, а у мањим местима своје заступнике (агенте). Инкасо провизија је известан проценат од премије који осигуравач одобрава агенту.

Ови трошкови обично износе 2-3% инкасиране бруто премије. Нека су у датом примеру ови трошкови 2% бруто премије (**ВР**), тј.

Инкасо трошкови = 0,02 × ВР

Ако са **ВР′** означимо бруто премију без инкасо трошкова (Нето премија + аквизициони трошкови + административни трошкови), онда можемо поставити следећу једнакост:

ВР = ВР′ + 0,02 × ВР => 0,98 × ВР = ВР′ => ВР = ВР′/0,98

или конкретно:

ВР = 29,555/0,98 = 30,1585‰ осигуране суме.

Резиме:

- ✓ $\alpha = \delta / a_{x,\overline{n|}}$, тј. амортизација аквизиционих трошкова изражава се у промилима (‰) осигуране суме.
- ✓ **β** представља административни трошак изражен у промилима (‰) осигуране суме.
- ✓ **NP** је нето премија; **ВР** је бруто премија.

На основу претходно наведених разматрања и уведених ознака, можемо представити следећу једнакост:

$$BP = NP + \alpha + \beta + \gamma \times BP$$

$$BP = \frac{NP + \alpha + \beta}{1 - \gamma}$$

Битно је извршити поделу трошкова на:

1. ***једнократне*** - оне који се обрачунавају само у првој години осигурања и
2. ***трајне*** – оне који постоје свих n година осигурања или одређени број година у току трајања осигурања.

У неким случајевима није могуће поставити оштру поделу јер, на пример, аквизициони трошкови могу бити трајни (доходак аквизитера), али могу бити и једнократни (провизија закључка).

3.2. *Zillmer-Spragov (Цилмер-Шпрагов) метод – Метод резервне премије*

Најчешће коришћен бруто метод је *Zillmer-Spargov* метод, познат и као ***метод резервне премије***.

Према Цилмеровом методу за оцену математичке резерве, премија служи за покриће ризика, за формирање резерве, али и за покриће трошкова прибављања осигурања, односно аквизиционих трошкова, у целини или делимично. На овај начин се формирање математичке резерве у почетним годинама осигурања успорава, да би се то надокнадило у каснијим годинама осигурања, имајући у виду чињеницу да се животна осигурања закључују дугорочно.

Зилмеров метод се заснива на комбинованој искуственој таблици смртности, техничкој каматној стопи од 3,5% и коригованом систему резервисања. Корекција се односи на укључивање капитализације аквизиционих трошкова, као и испуњења следећих услова:

1. Капитализација аквизиционих трошкова мора бити амортизована током периода плаћања премије или у краћем периоду;
2. Мора се поставити горња граница аквизиционих трошкова (на пример 1,25% осигуране суме);

3. Аквизициони трошкови полиса које су прекинуте пре истека осигурања би требали бити плаћени од стране осталих уговарача осигурања из постојећег портфеља, што значи да не могу да се створе негативне резерве.

Цилмеров обрачун математичке резерве се заснива и на традиционалном моделу за акумулирање резерви, с тим што се нето премија коригује у првој години осигурања за износ допуштених аквизиционих трошкова.

Ако са P_x означимо нето годишњу премију, а са $\delta / a_{x,n\urcorner}$ део дохотка дефинисаног за покриће аквизиционих трошкова, онда израз:

$$P_x + \frac{\delta}{a_{x,n\urcorner}}$$

представља износ средстава из којих се врши покриће ризика, премијске резерве и аквизиционих трошкова. Ако из овога износа издвојимо аквизиционе трошкове, добићемо:

$(P_x + \delta / a_{x,n\urcorner}) - \delta$, при чему је $\delta = \alpha \times a_{x,n\urcorner}$

Математичка резерва израчуната на овај начин биће мања него што би била по нето методима. Међутим, када се прве године осигурања изврши исплата аквизиционих трошкова у целини, наредних ће година премија за покриће ризика и математичких резерви бити:

$$P_x + \frac{\delta}{a_{x,n\urcorner}}$$

Овај износ се назива и резервна премија.

Дакле, осигуравајуће друштво прве године осигурања покрива на терет премијске резерве, да би се та средства, од стране осигураника, враћала осигуравајућем друштву сваке године износом $\delta/a_{x,n\urcorner}$, тј. износом који представља додатак за нове трошкове. До математичке резерве по бруто методу долазимо на следећи начин:

$${}_t\bar{V}_x = A_{x+t} - \left(P_x + \frac{\delta}{a_{x,n\rceil}}\right) \cdot a_{x+t} = A_{x+t} - P_x \cdot a_{x+t} - \frac{\delta}{a_{x,n\rceil}} \cdot a_{x+t}$$

$${}_t\bar{V}_x = {}_t\bar{V}_x - \frac{\delta}{a_{x,n\rceil}} \cdot a_{x+t}$$

Значи, математичка резерва по бруто методу мања је од резерви по нето методу за износ $\frac{\delta}{a_{x,n\rceil}} \cdot a_{x+t}$.

Са повећањем t, ова вредност се смањује, па се математичка резерва обрачуната по бруто методу приближава математичкој резерви обрачунатој по нето методу. Када се n и t изједначе, биће $\frac{\delta}{a_{x,n\rceil}} \cdot a_{x+t} = 0$, те ће математичка резерва обрачуната по бруто методу бити једнака математичкој резерви по нето методу:

$$ {}_t\bar{V}_x = {}_t V_x $$

Ако у осигурању <u>за случај смрти</u> осигураник плаћа премију до смрти али највише n година, а капитал се исплаћује на крају године у којој осигураник умре, математичка резерва по бруто методу ће износити:

$$ {}_t\bar{V}_x = A_{x+t} - \left(P_x + \frac{\delta}{a_{x,n\rceil}}\right) \cdot a_{x+t,n-t\rceil} $$

Ако се ради о <u>мешовитом осигурању</u>, онда ће бити:

$$ {}_t\bar{V}_{x,n\rceil} = {}_t V_{x,n\rceil} - \frac{\delta}{a_{x,n\rceil}} \cdot a_{x+t,n-t\rceil} $$

Овако обрачуната математичка резерва може да буде и негативна због високих аквизиционих трошкова ($\boldsymbol{\delta}$), па је тада $\frac{\delta}{a_{x,n\rceil}} \cdot a_{x+t,n-t\rceil} > {}_t V_x$

Ако се жели избећи негативна премијска резерва, онда треба одредити максимум трошкова (***Цилмеров максимум првих трошкова***), при којима је ${}_t\bar{V}_x \geq 0$.

За <u>доживотно осигурање за случај смрти</u> биће:

$$ A_{x+1} - \left(P_x + \frac{\delta}{a_{x,n\rceil}}\right) \cdot a_{x+1} = 0 $$

$$ => A_{x+1} = \left(P_x + \frac{\delta}{a_{x,n\rceil}}\right) \cdot a_{x+1} => P_x + \frac{\delta}{a_{x,n\rceil}} = \frac{A_{x+1}}{a_{x+1}} = P_{x+1} $$

$$ => \delta = (P_{x+1} - P_x) \cdot a_{x,n\rceil} $$

Овај израз представља тзв. Цилмеров максимум првих трошкова.

Резиме:

Код обрачуна математичке резерве по нето методу полази се од P_x, а по бруто методу тј. методу резервне премије полази се од $P_{x+1} - P_x$. Другим речима, уместо старости x употребљава се старост x+1 , па се, због тога, овај метод и назива „x+1 метод“. Овај метод се посебно препоручује новоформираним осигуравајућим друштвима.

Према директивама ЕУ, Цилмерова корекција не сме да буде већа од 3,5% осигуране суме (OS). Општа формула за израчунавање математичке резерве по Цилмеру је:

$$t\bar{V}_x^z = ({}_tV_x - {}_tV_x^z) \cdot OS$$

при чему је :

$$ {}_tV_x{}^z = \frac{\dfrac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}}{\dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} \times Z$$

а ${}_tV_x$ је ознака за традиционалну, индивидуалну нето математичку резерву.

На основу изнетог, закључујемо да ће оцена математичке резерве по Цилмеровом бруто проспективном методу, <u>за мешовито осигурање капитала</u> бити:

$$t\bar{V}_x^z = (A_{x+t,\overline{n-t}|} - P_x \cdot a_{x+t,\overline{n-t}|} - {}_tV_x^z) \cdot OS$$

4. Групне методе

У теорији осигурања живота познато је више метода групног обрачуна математичке резерве. За све методе је карактеристична потреба да се број рачунских операција сведе на што мању меру, да се посао око обрачуна поједностави и да коначни резултати дају макар приближне резултате онима који би се добили код индивидуалног обрачуна.

Посматрано са овог аспекта, групне методе обрачуна математичке резерве могу бити двојаке. Обрачун се може поставити тако да даје коначне резултате који ће у потпуности одговарати резултатима које даје индивидуални обрачун. Такве методе се називају *групне методе у ужем смислу*, а најпознатије су:

- Karup-ова метода
- Altenburger-ова метода (метода помоћних бројева)
- Whiting-ова метода
- Fouret-ова метода

Код друге групе групних метода, обрачун се може поставити тако да даје коначне резултате који нису једнаки са индивидуалним обрачуном, али су одступања незнатна и могу се у потпуности занемарити. Такве методе се називају *приближне методе*, а најпознатије су:

- Lidstone-ова Z метода
- „t“ метода

Пошто је за сваку осигуравајућу компанију важно да извршени обрачун математичке резерве буде што тачнији уз што мањи број рачунских операција, групне методе у ужем смислу су најприкладније за обрачун.

Код примене групних метода, полази се од општег обрасца за индивидуални начин обрачуна:

$$\boldsymbol{V_t = A_t - P \cdot a_t}$$

Математичка резерва ($\boldsymbol{V_t}$) исказана је као разлика између садашње вредности будућих осигураних сума ($\boldsymbol{A_t}$) и садашње вредности будућих нето премија ($\boldsymbol{P \cdot a_t}$).

У даљем тексту биће објашњене неке од групних метода.

4.1. *Карупова метода*

Основни принцип на коме се заснива Карупова метода састоји се у томе да се групни обрачун математичке резерве постави тако да он ни у чему не одступа од индивидуалног обрачуна, што значи да образац за индивидуални обрачун не буде измењен, а да се ипак може применити и код израчунавања математичке резерве по групама.

Општи образац добија конкретнији облик, па ће гласити:

$$\sum(\boldsymbol{V_t \cdot S}) = \boldsymbol{A_t}\sum \boldsymbol{S} - \boldsymbol{a_t}\sum \boldsymbol{SP}$$

Уместо једног осигурања појавиће се читава група осигурања са истоврсним елементима који су неопходни за обрачун, па ће се математичка резерва за целу групу рачунати као да је у питању само једно осигурање. У обрасцу се за константе узима збир осигураних сума целе групе ($\sum \boldsymbol{S}$) и збир нето премија ($\sum \boldsymbol{SP}$), а за променљиве величине, које зависе од протеклог трајања, вредности $\boldsymbol{A_t}$ и $\boldsymbol{a_t}$.

Вредности $\boldsymbol{A_t}$ и $\boldsymbol{a_t}$ зависе од:

- форме осигурања,
- приступне старости осигураника,
- уговореног трајања осигурања,
- трајања плаћања премија,
- протеклог трајања осигурања.

Из кратког излагања о Каруповој методи, може се закључити да код примене ове методе не постоје никаква одступања од индивидуалне методе обрачуна математичке резерве, у чему је и њен основни значај. Из тог разлога, Карупова метода је свакако једна од најчешће применљивих у пракси.

4.2. *Алтенбургерова метода*

Алтенбургерова метода је позната у литератури по проналазачу Алтенбургеру, али је исто тако многи називају и метода помоћних бројева.

Основна карактеристика ове методе је у томе што се трансформација општег обрасца за индивидуални обрачун математичке резерве изражава као функција параметра и то или година старости доживљених у тренутку обрачуна или година рођења осигураника без обзира на време које преостаје до рока последњих премија. За све остале елементе се уводе помоћни бројеви који се израчунавају у тренутку осигурања и остају непромењени током периода трајања осигурања.

Образац за израчунавање математичке резерве гласи:

$$\boldsymbol{S_t V_{x,n} = SA_{x+t} - PSa_{x+t} + \frac{K}{D_{x+t}}}$$

Где је

$$K = SPN_{x+m} + SdN_{x+n}$$

Алтенбургеров коефицијент који представља константу независну од протеклог трајања t, а PS нето премија за осигурану суму S. За групу осигураника у моменту обрачуна $x+t$ година математичка резерва биће:

$$\sum S_t\, V_{x,n]} = A_{x+t} \sum S - a_{x+t} \sum PS + \frac{1}{D_{x+t}} \sum K$$

У овом обрасцу се види да се поред константи S и SP јавља и константа K, чија је улога да математичку резерву доживотног осигурања сведе на математичку резерву за жељену форму осигурања.

Примена Алтенбургерове методе при групном обрачуну математичке резерве ни у чему не одступа од индивидуалног обрачуна. Ова метода се разликује од Карупове методе по увођењу константе K, што поједностављује групни обрачун.

4.3. *Витингова метода*

По својој суштини, ова метода је веома слична Алтенбургеровој методи, пошто се сва осигурања групишу искључиво по старости осигураника у време обрачуна резерве.

Разлика између коефицијента К код ове две методе јесте у томе што се комутативни бројеви код Алтенбургера своде на старост осигураника о истеку осигурања, а код Витинга се комутативни бројеви дају према старости осигураника на почетку осигурања.

Витингов образац за индивидуални обрачун математичке резерве мешовитог осигурања гласи:

$$S_t V_{x,n]} = S \cdot A_{x+t} - SPa_{x+t} + \frac{1}{D_{x+t}} N_x\left(P_{x,n]} - P_x\right)S$$

За групни обрачун укупна математичка резерва биће:

$$\sum S_t\, V_{x,n]} = A_{x+t} \sum S - a_{x+t} \sum SP + \frac{1}{D_{x+t}} \sum K$$

Витингова метода је, као и метода Алтенбургера, веома погодна за примену у пракси.

4.4. *Фуретова метода*

Фуретова или рекурентна метода такође представља једну од погодних и прецизних метода за групни обрачун математичке резерве.

Код ове методе, математичка резерва за текућу годину се израчунава на основу прошлогодишње резерве. Уколико се на математичку резерву од претходне године (${}_{t-1}V$) дода годишња нето премија (P) и камата у текућој години (i), па од укупног износа одбију исплате за случај смрти (d_{x+t-1}), добиће се математичка резерва на крају текуће године осигурања (${}_{t}V$).

Код оваквог начина обрачуна математичке резерве Фурет полази од претпоставке да датум рођења свих осигураника пада на 1. јануар, као и почетак свих осигурања, тако да су године старости осигураника, као и протекло трајање осигурања, заокружени на цео број година.

Фурет, такође, узима да је плаћање премије годишње, а да се исплате за случај смрти врше на крају године осигурања. На тај начин је посао значајно олакшан, пошто се претпоставља годишње камаћење.

Коначни облик једначине за обрачун математичке резерве по методи Фурета, који се примењује на целу групу осигурања код којих је старост осигураника у време обрачуна $x+t$, гласи:

$$\sum S \cdot_t V_t = \frac{1}{P_{x+t+1}} / (\sum S \cdot_{t-1} V + \sum SP)(1+i) - q_{x+t-1} \sum S)/$$

У оваквом облику наведени образац се може применити за обрачун математичке резерве за сваку форму осигурања по којој је плаћање премија у току, а да се облик обрасца при томе не мења.

Фуретова метода даје прецизне резултате, па је такође погодна за практичну примену. Такође, ова метода служи за проверу тачности других метода које се користе за групни обрачун резерве.

Међутим, пошто је ова метода у својој суштини рекурентна, с обзиром да се резерва за текућу годину израчунава на основу резерве из прошле године, лако се може појавити грешка у обрачуну. Из тог разлога се препоручује да се с времена на време врши контрола обрачуна помоћу индивидуалне методе, како би се избегло евентуално понављање грешака.

Литература

1. Вугделија, Д. (2008) *Актуарска математика*, основни концепт за наставу, Суботица.
2. Кочовић, Ј. (2006) *Актуарске основе формирања тарифа у осигурању лица*, ЦИД Економског факултета у Београду, Београд.
3. Кочовић, Ј. и Ракоњац, А.Т. (2005) Збирка решених задатака из Финансијске и Актуарске математике, Економски факултет у Београду, Београд.
4. Ралевић, Р. (1973) *Финансијска и актуарска математика*, Савремена администрација, Београд.