

AKTUARSTVO

- Формуле -

др Наташа Папић-Благојевић

1. Теорија вероватноће

Класична дефиниција вероватноће

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Емпиријска вероватноћа

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f_i}{N}$$

Пермутације

- без понављања

$$P_n = n!$$

- са понављањем

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Комбинације

- без понављања

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n-r)!}$$

- са понављањем

$$\bar{C}_r^{n+r-1} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r! (n-1)!}$$

Условна вероватноћа

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

Правило или закон множења вероватноћа

$$P(AB) = P(BA) = P(A) P(B|A) = P(B) P(A|B)$$

Збирна вероватноћа

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Статистичка независност догађаја

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(A|B) = P(A) \text{ ако је } P(B) > 0$$

$$P(B|A) = P(B) \text{ ако је } P(A) > 0$$

Бајесова формула

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

2. Осигурање живота

Вероватноћа живота и смрти једног лица

$$l_x > l_{x+1} > l_{x+2} > \dots > l_{x+n}$$

$$d_x = l_x - l_{x+1} \Rightarrow l_{x+1} = l_x - d_x$$

- вероватноћа да ће лице старо x година доживети $(x+k)$ година

$${}_k p_x = \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

- вероватноћа да ће лице старо x година доживети $(x+n)$ година

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

- вероватноћа да лице старо x година неће доживети $x+1$ годину

$$q_x = 1 - p_x$$

$$p_x + q_x = 1$$

- вероватноћа да лице старо x година неће доживети $x+n$ година

$${}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x$$

$${}_n p_x + {}_n q_x = 1$$

- број чланова групе лица старости x година који ће вероватно живети после k година

$$G = \sum G \cdot {}_k p_x = \sum G \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

Вероватно трајање живота

$$\frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{1}{2} \Rightarrow l_{x+k} = \frac{l_x}{2}$$

Средње трајање живота

- прва варијанта (почетком године)

$$e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} \dots}{l_x}$$

- друга варијанта (крајем године)

$$e'_x = \frac{l_x + l_{x+1} + l_{x+2} \dots}{l_x} = 1 + e_x$$

- аритметичка средина прве и друге варијанте

$$e_x^0 = \frac{e_x + e'_x}{2} = \frac{e_x + 1 + e_x}{2} = \frac{1}{2} + e_x$$

Осигурање личне ренте уплатом мизе

1. Непосредна доживотна рента

- а) Антиципативна рента

$$a_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$M = R \cdot a_x$$

- б) Декурзивна рента

$$a'_x = \frac{N_x - D_x}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} - 1 = a_x - 1 = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$M = R \cdot a'_x$$

2. Одложена доживотна рента

- а) Антиципативна рента

$${}_k|a_x = \frac{N_{x+k}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_k|a_x$$

- б) Декурзивна рента

$${}_k|a'_x = \frac{N_{x+k+1}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_k|a'_x$$

3. Непосредна привремена рента

а) Антиципативна рента

$${}_n|a_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_n|a_x$$

б) Декурзивна рента

$${}_n|a'_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_n|a'_x$$

4. Одложена привремена рента

а) Антиципативна рента

$${}_k|{}_n|a_x = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_k|{}_n|a_x$$

б) Декурзивна рента

$${}_k|{}_n|a'_x = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_k|{}_n|a'_x$$

Осигурање личне ренте уплатом премије

1. Премија се плаћа доживотно

а) Рента се прима непосредно и доживотно

- Антиципативна рента

$$P(a_x) = 1 \Rightarrow P = R \cdot P(a_x) = R$$

- Декурзивна рента

$$P(a'_x) = 1 - \frac{D_x}{N_x} = 1 - \frac{1}{a_x}$$

$$P = R \cdot P(a'_x)$$

б) Рента се прима одложено и доживотно (антиципативно)

$$P({}_k|a_x) = \frac{N_{x+k}}{N_x}$$

$$P = R \cdot P({}_k|a_x)$$

2. Премија се плаћа привремено (највише m пута) и антиципативно

а) Рента се прима непосредно и доживотно

$${}_mP(a_x) = \frac{N_x}{N_x - N_{x+m}}$$

$$P = R \cdot {}_mP(a_x)$$

б) Рента се прима после k година и доживотно

$${}_mP({}_k|a_x) = \frac{N_{x+k}}{N_x - N_{x+m}}$$

$$P = R \cdot {}_mP({}_k|a_x)$$

в) Рента се прима првих n година

$${}_mP({}_n|a_x) = \frac{N_x - N_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

$$P = R \cdot {}_mP({}_n|a_x)$$

г) Рента се прима после k година, али највише n пута

$${}_mP({}_k|_n a_x) = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

$$P = R \cdot {}_mP({}_k|_n a_x)$$

Осигурање капитала уплатом мизе

1. Осигурање капитала за случај смрти

а) Доживотно осигурање капитала за случај смрти

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

$$M = K \cdot A_x$$

б) Одложено осигурање капитала за случај смрти

$${}_k A_x = \frac{M_{x+k}}{D_x}$$

$$M = K \cdot {}_k A_x$$

в) Привремено осигурање за случај смрти

$${}_n A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$M = K \cdot {}_n A_x$$

г) Одложено и привремено осигурање за случај смрти

$${}_k {}_n A_x = \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x}$$

$$M = K \cdot {}_k {}_n A_x$$

2. Осигурање капитала за случај доживљења

$${}_n E_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$M = K \cdot {}_n E_x$$

3. Мешовито осигурање

$$A_{x,n} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x,n} = {}_{|n}A + {}_{|n}E_x$$

$$M = K \cdot A_{x,n}$$

Осигурање капитала уплатом годишње премије

1. Премија се плаћа доживотно

а) Непосредно осигурање капитала (без услова и ограничења)

$$P(A_x) = \frac{M_x}{N_x} = \frac{A_x}{a_x}$$

$$P = K \cdot P(A_x)$$

б) Одложено осигурање капитала

$$P({}_kA_x) = \frac{M_{x+k}}{N_x} = \frac{{}_kA_x}{a_x}$$

$$P = K \cdot P({}_kA_x)$$

2. Премија се плаћа привремено

а) Доживотно осигурање капитала за случај смрти

$${}_mP(A_x) = \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} = \frac{A_x}{{}_ma_x}$$

$$P = K \cdot {}_mP(A_x)$$

б) Привремено осигурање капитала за случај смрти (на n година)

$${}_mP({}_nA_x) = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} = \frac{{}_nA_x}{{}_ma_x}$$

$$P = K \cdot {}_mP({}_nA_x)$$

в) Привремено осигурање капитала за случај доживљења

$${}_mP({}_nE_x) = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} = \frac{{}_nE_x}{{}_ma_x}$$

$$P = K \cdot {}_mP({}_nE_x)$$

г) Мешовито осигурање капитала

$${}_mP(A_{x,n}) = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} = {}_mP({}_nA_x) + {}_mP({}_nE_x)$$

$$P = K \cdot {}_mP(A_{x,n})$$

Осигурање капитала уплатом месечне премије

1. Премија се плаћа доживотно

а) Непосредно осигурање капитала (без услова и ограничења)

$$P^m(A_x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{M_x}{N_x} \cdot r$$

$$P^m = K \cdot P^m(A_x)$$

б) Одложено осигурање капитала

$$P^m({}_k|A_x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{M_{x+k}}{N_x} \cdot r$$

$$P^m = K \cdot P^m({}_k|A_x)$$

2. Премија се плаћа привремено

а) Доживотно осигурање капитала за случај смрти

$${}_mP^m(A_x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} \cdot r$$

$$P^m = K \cdot {}_mP^m(A_x)$$

б) Привремено осигурање капитала за случај смрти (на n година)

$${}_mP^m({}_nA_x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \cdot r$$

$$P^m = K \cdot {}_mP^m({}_nA_x)$$

в) Привремено осигурање капитала за случај доживљења

$${}_mP^m({}_nE_x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \cdot r$$

$$P^m = K \cdot {}_mP^m({}_nE_x)$$

г) Мешовито осигурање капитала

$${}_mP^m(A_{x,n}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \cdot r$$

$$P^m = K \cdot {}_mP^m(A_{x,n})$$

3. Математичке резерве

Нето методе

1. Књиговодствена метода

$${}_{t+1}V_x = \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}}({}_tV_x + P_x) - \frac{C_{x+t}}{D_{x+t+1}}$$

2. Ретроспективна метода

$${}_tV_x = \frac{P_x \cdot (N_x - N_{x+t}) - (M_x - M_{x+t})}{D_{x+t}}$$

3. Проспективна метода

$${}_tV_x = \frac{M_{x+t} - P_x \cdot N_{x+t}}{D_{x+t}}$$

4. Ретроспективна метода за мешовито осигурање

$${}_tV_x = (P_{x,n] \cdot a_{x,t]} - A_{x,t]) \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}}$$

$$P_{x,n]} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

$$a_{x,t]} = \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}$$

$$A_{x,t]} = \frac{M_x - M_{x+t}}{D_x}$$

5. Проспективна метода за мешовито осигурање

$${}_tV_x = A_{x+t,n-t]} - P_{x,n]} \cdot a_{x+t,n-t]}$$

$$A_{x+t,n-t]} = \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}}$$

$$P_{x,n]} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

$$a_{x+t,n-t]} = \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}$$

Бруто методе

Годишња премија за мешовито осигурање:

$$P_{x,n]} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Вредност свих премија које ће доспети у току n година:

$$a_{x,n]} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Садашња вредност свих отплата:

$$\alpha \cdot a_{x,n]}$$