REŠENJA ZADATAKA SA PISMENOG ISPITA IZ MATEMATIKE NA VPŠSS U NOVOM SADU 01.02.2008.

$\boxed{\text{1. grupa}}$

1. Neka su dati kompleksni brojevi $z_1 = -5 - 7i$ i $z_2 = 2 - 3i$. Izračunati a) $\dfrac{z_1}{z_2}$ b) $z_1 + z_2$
2. Pomoću inverzne matrice naći rešenja sistema jednačina

$$\begin{array}{rrrcr} 2\,x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 2\,x_1 & +2\,x_2 & -x_3 & = & -1 \\ 4\,x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}$$

3. Naći intervale monotonosti, ekstremne vrednosti i prevojne tačke funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^3 + 12x^2 + 36x + 5$$

4. Izračunati integral $\int x^5 \cdot \sin(2x^6 + 7)dx$
5. Potrošač želi da kupi automobil marke Opel Corsa čija vrednost iznosi 11200 € , a koji se prodaje sa učešćem od 15%. Ostatak se plaća putem kredita u roku od 60 meseci uz kamatu od 6%. Odrediti ukupan dug i mesečnu ratu.

REŠENJA:

1. a)

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{-5-7i}{2-3i} \\ &= \frac{-5-7i}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} \\ &= \frac{-10-15i-14i-21i^2}{2^2-(3i)^2} \\ &= \frac{-10-29i-21\cdot(-1)}{4-9\cdot(-1)} \\ &= \frac{-10-29i+21}{4+9} \\ &= \boxed{\frac{11-29i}{13}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (-5-7i) + (2-3i) \\ &= (-5+2) + (-7-3)i \\ &= \boxed{-3-10i} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{array}{rrrcr} 2\,x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 2\,x_1 & +2\,x_2 & -x_3 & = & -1 \\ 4\,x_1 & -x_2 & +x_3 & = & -1 \end{array} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \Leftrightarrow A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Kako je $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^*$, to znači da je $X = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^* \cdot B$ Da bismo odredili X potrebno je da izračunamo $\det(A)$ i A^*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{matrix} = -2$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} \\ A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & -2 & 4 \\ -10 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* \cdot B = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & -2 & 4 \\ -10 & -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.

Prvi izvod funkcije: $f'(x) = (x^3 + 12x^2 + 36x + 5)' = 3x^2 + 24x + 36$

Ekstremne vrednosti: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 24x + 36 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -6 \vee x_2 = -2$

Kandidati za ekstremne vrednosti su prema tome $x_1 = -6$ i $x_2 = -2$. Da bismo proverili prirodu ekstrema potreban nam je drugi izvod funkcije: $f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 + 24x + 36)' = 6x + 24$

Prvo ispitujemo prirodu ekstrema u $x_1 = -6$

$f''(x_1) = f''(-2) = 6 \cdot (-6) + 24 = -36 + 24 = -12 < 0$ Znači da funkcija ima maksimum u tački $A_{max}(-6, f(-6))$. Kako je $f(-6) = (-6)^3 + 12 \cdot (-6)^2 + 36 \cdot (-6) + 5 = 5$ onda je maksimum u $A_{max}(-6, 5)$

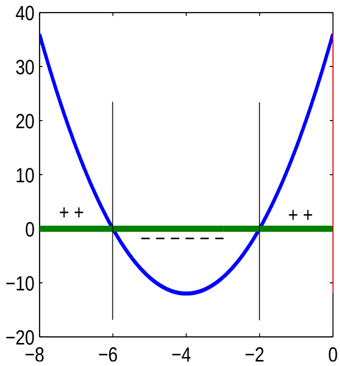
Na isti način ispitujemo prirodu ekstrema u $x_2 = -2$

$f''(x_2) = f''(-2) = 6 \cdot (-2) + 24 = -12 + 24 = 12 > 0$ Znači da funkcija ima minimum u tački $B_{min}(-2, f(-2))$. Kako je $f(-2) = (-2)^3 + 12 \cdot (-2)^2 + 36 \cdot (-2) + 5 = -27$ onda je minimum u $B_{min}(-2, -27)$

Intervali monotonosti: Sa slike prvog izvoda funkcije možemo pročitati kada je prvi izvod pozitivan, a kada je negativan:

$f \nearrow \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -6) \cup (-2, \infty)$

$f \searrow \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-6, -2)$



Prevojne tačke:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 24 = 0 \Leftrightarrow 6x = -24 \Leftrightarrow x = -4$, pa je prevojna tačka data sa $C(-4, f(-4))$

Pošto je $f(-4) = (-4)^3 + 12 \cdot (-4)^2 + 36 \cdot (-4) + 5 = -11$, onda je prevojna tačka $C(-4, -11)$

4.

Uvodeći smenu $t = 2x^6 + 7$ dobijamo $dt = 12x^5 dx \Leftrightarrow x^5 dx = \frac{1}{12} dt$ pa je

$$\int x^5 \sin(2x^6 + 7) dx = \int \sin t \frac{1}{12} dt = \frac{1}{12} \int \sin t \, dt = \frac{1}{12}(-\cos t) + C = \boxed{-\tfrac{1}{12}\cos(2x^6 + 7) + C}$$

5.

Neka je $G = 11200$ ukupni iznos koji treba platiti za automobil. Sa p_u ćemo označiti procenat učešća pa je $p_u = 15\%$. Označimo učešće sa U, dobijamo ga sledećim postupkom:

$$G : U = 100 : p_u \Leftrightarrow 11200 : U = 100 : 15 \Leftrightarrow U \cdot 100 = 11200 \cdot 15 \Leftrightarrow U = \frac{11200 \cdot 15}{100} = 1680$$

Iznos koji treba otplatiti u roku 60 meseci ($m = 60$) uz kamatu $p = 6\%$ je tada

$$K = G - U = 11200 - 1680 = 9520$$

Za određivanje ukupnog duga D i prosečne mesečne rate b nam je potreban kamatni koeficijent:

$$k = \frac{(m+1)p}{2400} = \frac{(60+1) \cdot 6}{2400} = 0,1525$$

Ukupni dug je : $D = K \cdot (1 + k) = 9520 \cdot (1 + 0.1525) = 10971,80$€

prosečna mesečna rata je: $b = \frac{D}{m} = \frac{10971,80}{60} = 182,8633 \approx 182,86$€

$\boxed{\text{2. grupa}}$

1. Neka su dati kompleksni brojevi $z_1 = 8 - 4i$ i $z_2 = -3 + 5i$. Izračunati a) $z_1 \cdot z_2$ b) $|z_1|$
2. Pomoću inverzne matrice naći rešenja sistema jednačina

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -2\,x_2 & +x_3 & = & 0 \\ -\,x_1 & +4\,x_2 & -6\,x_3 & = & 5 \\ 2\,x_1 & -5\,x_2 & -2\,x_3 & = & -9 \end{array}$$

3. Naći intervale monotonosti, ekstremne vrednosti i prevojne tačke funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$$

4. Izračunati integral $\int x^3 \sqrt[5]{3x^4 - 6} dx$
5. Roba vrednosti 100000 dinara kupljena je na kredit uz 10% učešća. Kredit je odobren na 12 meseci sa 12% kamate. Odrediti koliko iznosi mesečna rata ovog potrošačkog kredita.

REŠENJA:

1. a)

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (8 - 4i) \cdot (-3 + 5i) \\ &= -24 + 40i + 12i - 20i^2 \\ &= -24 + 52i - 20 \cdot (-1) \\ &= -24 + 52i + 20 \\ &= \boxed{-4 + 52i} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{8^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{64 + 16} \\ &= \sqrt{80} \\ &= \boxed{4\sqrt{5}} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -2\,x_2 & +x_3 & = & 0 \\ -\,x_1 & +4\,x_2 & -6\,x_3 & = & 5 \\ 2\,x_1 & -5\,x_2 & -2\,x_3 & = & -9 \end{array} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}}_{B} \Leftrightarrow A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

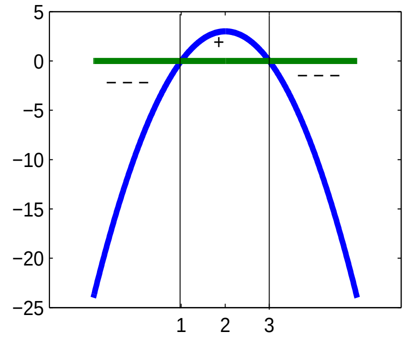
Kako je $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^*$, to znači da je $X = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^* \cdot B$ Da bismo odredili X potrebno je da izračunamo $\det(A)$ i A^*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{matrix} = -13$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} \\ A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 & -9 & 8 \\ -14 & -4 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* \cdot B = \frac{1}{-13} \cdot \begin{bmatrix} -38 & -9 & 8 \\ -14 & -4 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.
Prvi izvod funkcije: $f'(x) = (-x^3 + 6x^2 - 9x + 8)' = -3x^2 + 12x - 9$
Ekstremne vrednosti: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = 3$
Kandidati za ekstremne vrednosti su prema tome $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$. Da bismo proverili prirodu ekstrema potreban nam je drugi izvod funkcije: $f''(x) = (f'(x))' = (-3x^2 + 12x - 9)' = -6x + 12$
Prvo ispitujemo prirodu ekstrema u $x_1 = 1$
$f''(x_1) = f''(1) = -6 \cdot 1 + 12 = -6 + 12 = 6 > 0$ Znači da funkcija ima minimumu tački $A_{min}(1, f(1))$. Kako je $f(1) = -1^3 + 6 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 8 = 4$ onda je minimum $A_{min}(1, 4)$
Na isti način ispitujemo prirodu ekstrema u $x_2 = 3$
$f''(x_2) = f''(3) = -6 \cdot 3 + 12 = -18 + 12 = -6 < 0$ Znači da funkcija ima maksimum u tački $B_{max}(3, f(3))$.
Kako je $f(3) = -3^3 + 6 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 8 = 8$ onda je maksimum u $B_{max}(3, 8)$



Intervali monotonosti: Sa slike prvog izvoda funkcije možemo pročitati kada je prvi izvod pozitivan, a kada je negativan:
$f \nearrow \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, 3)$
$f \searrow \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$
Prevojne tačke:
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 12 = 0 \Leftrightarrow -6x = -12 \Leftrightarrow x = 2$, pa je prevojna tačka data sa $C(2, f(2))$
Pošto je $f(2) = -2^3 + 6 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 8 = 6$, onda je prevojna tačka $C(2, 6)$

4.
Uvodeći smenu $t = 3x^4 - 6$ dobijamo $dt = 12x^3dx \Leftrightarrow x^3dx = \frac{1}{12}dt$ pa je

$$\int x^3 \sqrt[5]{3x^4 - 6}dx = \int \sqrt[5]{t}\frac{1}{12}dt = \frac{1}{12}\int \sqrt[5]{t}dt = \frac{1}{12}\int t^{\frac{1}{5}}dt = \frac{1}{12}\frac{t^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + C = \frac{1}{12}\frac{5}{6}t^{\frac{6}{5}} + C =$$

$$= \frac{5}{72}t^{\frac{6}{5}} + C = \frac{5}{72}(3x^4 - 6)^{\frac{6}{5}} + C = \boxed{\frac{5}{72}\sqrt[5]{(3x^4 - 6)^6} + C}$$

5.
Neka je $G = 100000$ ukupni iznos koji treba platiti za robu. Sa p_u ćemo označiti procenat učešća pa je $p_u = 10\%$. Označimo učešće sa U, dobijamo ga sledećim postupkom:

$$G : U = 100 : p_u \Leftrightarrow 100000 : U = 100 : 10 \Leftrightarrow U \cdot 100 = 100000 \cdot 10 \Leftrightarrow U = \frac{100000 \cdot 10}{100} = 10000$$

Iznos koji treba otplatiti u roku 12 meseci ($m = 12$) uz kamatu $p = 12\%$ je tada

$$K = G - U = 100000 - 10000 = 90000$$

Za određivanje ukupnog duga D i prosečne mesečne rate b nam je potreban kamatni koeficijent:

$$k = \frac{(m+1)p}{2400} = \frac{(12+1) \cdot 12}{2400} = 0,065$$

Ukupni dug je : $D = K \cdot (1 + k) = 90000 \cdot (1 + 0.065) = 95850$ din

prosečna mesečna rata je: $b = \frac{D}{m} = \frac{95850}{12} = 7987,50$ din