REŠENJA ZADATAKA SA PISMENOG ISPITA IZ MATEMATIKE NA VPŠSS U NOVOM SADU 14.03.2008.

1. grupa

1. Dokazati skupovnu jednakost: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
2. Pomoću inverzne matrice naći rešenja sistema jednačina

$$\begin{array}{rrrcl} 2\,x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 3 \\ -\,x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ 5\,x_1 & +7\,x_2 & +4\,x_3 & = & 1 \end{array}$$

3. Naći intervale monotonosti, ekstremne vrednosti i prevojne tačke funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 15x + 1$$

4. Izračunati integral $\int \sin^5 x \cdot \cos x dx$
5. Cena tastature je 1800 din, nakon poskupljenja od 10% , došlo je do pojeftinjenja od 5%. Kolika je nova cena tastature?

REŠENJA:

1.
$$\begin{aligned} (x,y) \in (A \cup B) \times C &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge y \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \vee (x,y) \in (B \times C) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{array}{rrrcl} 2\,x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 3 \\ -\,x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ 5\,x_1 & +7\,x_2 & +4\,x_3 & = & 1 \end{array} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \Leftrightarrow A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Kako je $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^*$, to znači da je $X = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^* \cdot B$ Da bismo odredili X potrebno je da izračunamo $\det(A)$ i A^*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{array}{|rrr|rr} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 7 & 4 & 5 & 7 \end{array} = 33$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} \\ A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -11 & 0 \\ -1 & 13 & 3 \\ -12 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* \cdot B = \frac{1}{33} \cdot \begin{bmatrix} 11 & -11 & 0 \\ -1 & 13 & 3 \\ -12 & -9 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3.

Prvi izvod funkcije: $f'(x) = (\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 15x + 1)' = x^2 - 8x + 15$

Ekstremne vrednosti: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3 \vee x_2 = 5$

Kandidati za ekstremne vrednosti su prema tome $x_1 = 3$ i $x_2 = 5$. Da bismo proverili prirodu ekstrema potreban nam je drugi izvod funkcije: $f''(x) = (f'(x))' = (x^2 - 8x + 15)' = 2x - 8$

Prvo ispitujemo prirodu ekstrema u $x_1 = 3$

$f''(x_1) = f''(3) = 2 \cdot 3 - 8 = 6 - 8 = -2 < 0$ Znači da funkcija ima maksimum u tački $A_{max}(3, f(3))$.

Kako je $f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 + 1 = 19$ onda je maksimum u $A_{max}(3, 19)$

Na isti način ispitujemo prirodu ekstrema u $x_2 = 5$

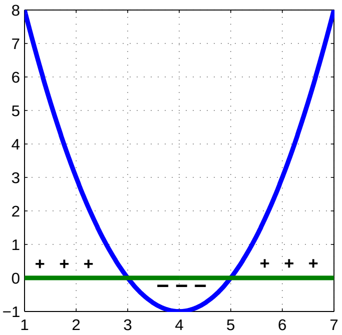
$f''(x_2) = f''(5) = 2 \cdot 5 - 8 = 10 - 8 = 2 > 0$ Znači da funkcija ima minimum u tački $B_{min}(5, f(5))$.

Kako je $f(5) = \frac{1}{3} \cdot 5^3 - 4 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 + 1 = \frac{53}{3}$ onda je minimum u $B_{min}(5, \frac{53}{3})$

Intervali monotonosti: Sa slike prvog izvoda funkcije možemo pročitati kada je prvi izvod pozitivan, a kada je negativan:

$f \nearrow \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3) \cup (5, \infty)$

$f \searrow \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (3, 5)$



Prevojne tačke:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$, pa je prevojna tačka data sa $C(4, f(4))$

Pošto je $f(4) = \frac{1}{3} \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2 + 15 \cdot 4 + 1 = \frac{55}{3}$, onda je prevojna tačka $C(4, \frac{55}{3})$

4.

Uvodeći smenu $t = \sin x$ dobijamo $dt = \cos x dx$ pa je

$$\int \sin^5 x \cdot \cos x dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C$$

5.

Cena tastature je $G = 1800$, a procenat poskupljenja je $p = 10\%$, tada je

$$G : P = 100 : p \Leftrightarrow 1800 : P = 100 : 10 \Leftrightarrow P \cdot 100 = 1800 \cdot 10 \Leftrightarrow P = \frac{1800 \cdot 10}{100} = 180$$

Onda je nova cena tastature nakon poskupljenja data sa $G_1 = G + P = 1800 + 180 = 1980$ din.
Zbog pojeftinjenja od $p_1 = 5\%$ imamo sledeće:

$$G_1 : P_1 = 100 : p_1 \Leftrightarrow 1980 : P_1 = 100 : 5 \Leftrightarrow P_1 \cdot 100 = 1980 \cdot 5 \Leftrightarrow P_1 = \frac{1980 \cdot 5}{100} = 99$$

Pa je nova cena tastature nakon pojeftinjenja: $G_2 = G_1 - P_1 = 1980 - 99 = 1881$ din.

$\boxed{\text{2. grupa}}$

1. Dokazati skupovnu jednakost: $\qquad (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

2. Pomoću inverzne matrice naći rešenja sistema jednačina

$$\begin{array}{rrrrr} x_1 & +2\,x_2 & +x_3 & = & 6 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0 \\ -2\,x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -1 \end{array}$$

3. Naći intervale monotonosti, ekstremne vrednosti i prevojne tačke funkcije $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 1$$

4. Izračunati integral $\int \cos^7 x \cdot \sin x dx$

5. Zanatska radionica za izradu folije za staklenike dnevno proizvodi $2000m^2$ folije. Zbog velike potražnje povećala je svoju proizvodnju za 35%, a potom je proizvodnja uvećana za još 20% . Kolika je nova dnevna proizvodnja folije?

REŠENJA:

1.
$$\begin{aligned} (x,y) \in (A \cap B) \times C &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge y \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge y \in C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C \wedge y \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \wedge (x,y) \in (B \times C) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C) \end{aligned}$$

2.
$$\begin{array}{rrrrr} x_1 & +2\,x_2 & +x_3 & = & 6 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0 \\ -2\,x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -1 \end{array} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B} \Leftrightarrow A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Kako je $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^*$, to znači da je $X = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^* \cdot B$ $\quad$ Da bismo odredili X potrebno je da izračunamo $\det(A)$ i A^*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right. = -3$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} \\ A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* \cdot B = \frac{1}{-3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.

Prvi izvod funkcije: $f'(x) = (\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 1)' = x^2 - 6x + 8$

<u>Ekstremne vrednosti</u>: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 \vee x_2 = 4$

Kandidati za ekstremne vrednosti su prema tome $x_1 = 2$ i $x_2 = 4$. Da bismo proverili prirodu ekstrema potreban nam je drugi izvod funkcije: $f''(x) = (f'(x))' = (x^2 - 6x + 8)' = 2x - 6$

Prvo ispitujemo prirodu ekstrema u $x_1 = 2$

$f''(x_1) = f''(3) = 2 \cdot 2 - 6 = 4 - 6 = -2 < 0$ Znači da funkcija ima maksimum u tački $A_{max}(2, f(2))$.

Kako je $f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 1 = \frac{17}{3}$ onda je maksimum u $A_{max}(2, \frac{17}{3})$

Na isti način ispitujemo prirodu ekstrema u $x_2 = 4$

$f''(x_2) = f''(4) = 2 \cdot 4 - 6 = 8 - 6 = 2 > 0$ Znači da funkcija ima minimum u tački $B_{min}(4, f(4))$.

Kako je $f(4) = \frac{1}{3} \cdot 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4 - 1 = \frac{13}{3}$ onda je minimum u $B_{min}(4, \frac{13}{3})$

<u>Intervali monotonosti</u>: Sa slike prvog izvoda funkcije možemo pročitati kada je prvi izvod pozitivan, a kada je negativan:

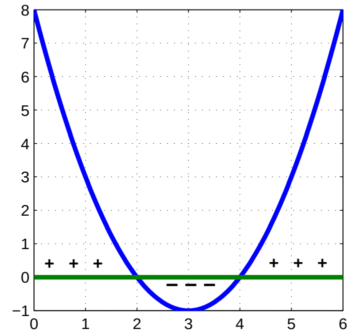
$f \nearrow \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$

$f \searrow \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2, 4)$

<u>Prevojne tačke</u>:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$, pa je prevojna tačka data sa $C(3, f(3))$

Pošto je $f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 1 = 5$, onda je prevojna tačka $C(3, 5)$



4.

Uvodeći smenu $t = \cos x$ dobijamo $dt = -\sin x dx, \Leftrightarrow \sin x dx = -dt$ pa je

$$\int \cos^7 x \cdot \sin x dx = \int t^7 \cdot (-dt) = -\int t^7 \cdot dt = -\frac{t^8}{8} + C = -\frac{\cos^8 x}{8} + C$$

5.

Dnevna proizvodnja je $G = 2000$, a procenat povećanja proizvodnje je $p = 35\%$, tada je

$$G : P = 100 : p \Leftrightarrow 2000 : P = 100 : 35 \Leftrightarrow P \cdot 100 = 2000 \cdot 35 \Leftrightarrow P = \frac{2000 \cdot 35}{100} = 700$$

Onda je nova dnevna proizvodnja nakon uvećanja data sa $G_1 = G + P = 2000 + 700 = 2700\, m^2$.
Zbog novog uvećanja od $p_1 = 20\%$ imamo sledeće:

$$G_1 : P_1 = 100 : p_1 \Leftrightarrow 2700 : P_1 = 100 : 10 \Leftrightarrow P_1 \cdot 100 = 2700 \cdot 20 \Leftrightarrow P_1 = \frac{2700 \cdot 20}{100} = 540$$

Pa je nova dnevna proizvodnja folije: $G_2 = G_1 + P_1 = 2700 + 540 = 3240\, m^2$.