REŠENJA ZADATAKA SA PISMENOG ISPITA IZ MATEMATIKE NA VPŠSS U NOVOM SADU
26.01.2008.

1. Neka je funkcija marginalnih prihoda $P'(p) = \frac{2}{3}p+1$ i funkcija marginalnih troškova sa $C'(x) = 8x-33$ i $C(4) = 121$. **a)** Odrediti funkciju prihoda $P = P(p)$ i funkciju troškova $C = C(x)$. **b)** Odrediti funkciju tražnje $x = x(p)$ i funkciju $p = p(x)$. **c)** Odrediti funkciju prihoda $P = P(x)$ u zavisnosti od x. **d)** Odrediti funkciju dobiti $D = D(x)$. **e)** Odrediti optimalni obim proizvodnje i maksimalnu dobit. **f)** Odrediti interval rentabilne proizvodnje.

Rešenje: $\boxed{P(p) = \frac{1}{3}p^2 + p = p(\frac{1}{3}p+1) = px}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x(p) = \frac{1}{3}p+1}$ $\Rightarrow$ $\boxed{p = 3x-3}$, $\Rightarrow$ $\boxed{P(x) = p \cdot x = 3x^2 - 3x}$ $\boxed{C(x) = 4x^2 - 33x + 189}$, $\boxed{D(x) = P(x) - C(x) = -x^2 + 30x - 189}$, $D'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 30 = 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{x_{opt} = 15}$, $\boxed{D_{max} = D(15) = 36}$, $\boxed{D(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (9, 21)}$.

2. $$\mathcal{S}: \begin{array}{rrrcl} x & -y & +pz & = & 2 \\ 2x & +py & -z & = & 4 \\ x & +3y & -3z & = & 2 \end{array}$$ Neka je $\mathcal{S}$ sistem linearnih jednačina sa nepoznatama x, y, z i neka je p realni parametar toga sistema jednačina S.

a) Za koje vrednosti parametra p sistem $\mathcal{S}$ je određen?
b) Rešiti sitem $\mathcal{S}$ za $p = 0$ matričnom metodom.
c) Za koje vrednosti parametra p sistem $\mathcal{S}$ je kontradiktoran (protivurečan)?
d) Za koje vrednosti parametra p sistem $\mathcal{S}$ je neodređen? Napisati skup rešenja.

Rešenje:

a) $D_s = \begin{vmatrix} 1 & -1 & p \\ 2 & p & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3 \cdot p + 3) - (-1)(-6+1) + p \cdot (6-p) = -p^2 + 3p - 2 \Leftrightarrow p = 1 \vee p = 2$, pa je sistem određen za $p \neq 1 \wedge p \neq 2$.

b) Neka je $p = 0 \Rightarrow D = -2$. Tada je

$$\begin{array}{l} x - y + 0z = 2 \\ 2x + 0y - z = 4 \\ x + 3y - 3z = 2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{D_{\mathcal{S}}} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ tj. $(x, y, z) = (2, 0, 0) \Leftrightarrow x = 2, y = 0, z = 0$.

c) Ni za jedno p sistem nije kontradiktoran.

d) Za $p = 1$ sistem $\mathcal{S}$ ekvivalentan je sa

$$\begin{array}{rrrcl} x & -y & +z & = & 2 \\ 2x & +y & -z & = & 4 \\ x & +3y & -3z & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrcl} x & -y & +z & = & 2 \\ & 3y & -3z & = & 0 \\ & 4y & -4z & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrcl} x & -y & +z & = & 2 \\ & y & -z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

$R_{\mathcal{S}} = \{(2, z, z) | z \in \mathbb{R}\}$ pa je sistem neodređen.

Za $p = 2$ sistem $\mathcal{S}$ ekvivalentan je sa

$$\begin{array}{rrrcl} x & -y & +2z & = & 2 \\ 2x & +2y & -z & = & 4 \\ x & +3y & -3z & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrcl} x & -y & +2z & = & 2 \\ & 4y & -5z & = & 0 \\ & 4y & -5z & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrcl} x & -y & +2z & = & 2 \\ & 4y & -5z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

$R_{\mathcal{S}} = \{(2 - \frac{3}{4}z, \frac{5}{4}z, z) | z \in \mathbb{R}\}$ pa je sistem neodređen.

3. Neka je $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija skupa realnih brojeva u skup realnih brojeva definisana sa $f(x) = (x-10)(x^2-7x+10) = x^3 - 17x^2 + 80x - 100$.
a) Odrediti tačke u kojim grafik funkcije seče x-osu tj. realne nule (korene) te funkcije . **b)** Odrediti znak funkcije tj. kada je pozitivna a kada je negativna. **c)** Odrediti ekstremne vrednosti funkcije f tj. minimum i maksimum. **d)** Odrediti intervale monotonosti tj. intervale u kojima funkcija raste i intervale u kojima funkcija opada. **e)** Odrediti prevojne tačke funkcije f. **f)** Nacrtati grafik funkcije f.

Rešenje a) $f(x) = (x-10)(x^2-7x+10) = (x-10)(x-2)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2, 5, 10\}$ **b)** $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (2,5) \cup (10, \infty)$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (5, 10)$ **c)** $f'(x) = 3x^2 - 34x + 80 = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{10}{3}, 8\}$, pa je $A_{max}(\frac{10}{3}, \frac{400}{27})$ i $B_{min}(8, -36)$, jer je $f''(\frac{10}{3}) = -14 < 0$ i $f''(8) = 14 > 0$. **d)** $f \nearrow \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 34x + 80 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \frac{10}{3}) \cup (8, \infty)$; $f \searrow \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 34x + 80 < 0 \Leftrightarrow x \in (\frac{10}{3}, 8)$ **e)** $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 34 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{17}{3}$, pa je $C(\frac{17}{3}, \frac{-286}{27})$ prevojna tačka.

4. Izračunati površinu ograničenu graficima funkcia $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ i $g(x) = -2x - 1$.

Rešenje: $-x^2-2x+8=-2x-1 \Rightarrow x_1=-3, x_2=3 \Rightarrow P=\int_{-3}^{3}((-x^2-2x+8)-(-2x-1))dx=\int_{-3}^{3}(-x^2+9)dx=(-\frac{1}{3}x^3+9x)|_{-3}^{3}=36.$

5. Dužnik je pozajmio početkom 2005. godine 3800 eura i 6500 eura krajem 2006. On se dogovorio sa svojim poveriocem da sve svoje dugove otplati tako što će dekurzivno tromesečno uplaćivati po 220 eura od početka 2006. do početka 2011. godine, a ostatak duga isplatiti u dve jednake rate i to jedna početkom 2010. a druga krajem 2011. godine. Koliko iznosi svaka od te dve rate ako je u svim obračunima kapitalisanje tromesečno i godišnji procenat kamate 4,9%.

Rešenje Zajedno sve uplate od po 220 eura krajem 2010-te iznosiće $220\cdot r^{19}+\ldots+220\cdot r+220=220\cdot\frac{r^{20}-1}{r-1}$, a krajem 2011-te godine iznosiće $220\cdot\frac{r^{20}-1}{r-1}\cdot r^4$. Prema tome ako i ostala sredstva eskontujemo na kraj 2011-te godine i na levu stranu jednakosti stavimo sredstva poverioca, a na desnu sredstva dužnika dobija se jednakost $3\,800\cdot r^{28}+6\,500\cdot r^{20}=220\cdot\frac{r^{20}-1}{r-1}\cdot r^4+K\cdot(r^8+1)$. Kako je $r=1+\frac{4{,}9}{400}=1{,}01225$ to sledi da je

$K=\frac{3\,800\cdot r^{28}+6\,500\cdot r^{20}-220\cdot\frac{r^{20}-1}{r-1}\cdot r^4}{r^8+1}\approx\frac{5\,343{,}6941+8\,292{,}18658-5\,198{,}853723}{2{,}102306285}\approx 4\,013{,}224437.$ $\boxed{K\approx 4\,013{,}22\epsilon}$