REŠENJA ZADATAKA SA PISMENOG ISPITA IZ MATEMATIKE NA VPŠSS U NOVOM SADU
19.03.2008.

1. Neka su funkcija tražnje i funkcija prosečnih troškova definisane sa $x = -p + 100$ i $\overline{C}(x) = x - 300 + \frac{15000}{x}$.
a) Odrediti funkciju prihoda $P = P(p)$ i funkciju troškova $C = C(x)$. **b)** Odrediti funkciju prihoda $P = P(x)$ u zavisnosti od x. **c)** Odrediti funkciju dobiti $D = D(x)$. **d)** Odrediti optimalni obim proizvodnje i maksimalnu dobit. **e)** Odrediti interval rentabilne proizvodnje. **f)** Odrediti funkciju marginalnih troškova.

Rešenje:

a) $P(p) = p \cdot x = p \cdot (-p + 100) = -p^2 + 100p$, $C(x) = x \cdot \overline{C}(x) = x \cdot (x - 300 + \frac{15000}{x}) = x^2 - 300x + 15000$

b) $P(x) = -x^2 + 100x$ **c)** $D(x) = P(x) - C(x) = -x^2 + 100x - (x^2 - 300x + 15000) = -2x^2 + 400x - 15000$

d) $D'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 400 = 0 \Leftrightarrow x_{opt} = 100$, $D_{max} = D(100) = 5000$ **e)** $D(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (50, 150)$.

f) $C'(x) = 2x - 300$.

2. $\mathcal{S}: \begin{array}{ccccc} x & +y & +z & = & 2 \\ 2x & -2y+pz & & = & -2 \\ 3x & -py & +2z & = & 0 \end{array}$ Neka je $\mathcal{S}$ sistem linearnih jednačina sa nepoznatama x, y, z i neka je p realni parametar toga sistema jednačina S.

a) Za koje vrednosti parametra p sistem $\mathcal{S}$ je određen? **b)** Rešiti sitem $\mathcal{S}$ za $p = 0$ matričnom metodom. **c)** Za koje vrednosti parametra p sistem $\mathcal{S}$ je kontradiktoran (protivurečan)? **d)** Za koje vrednosti parametra p sistem $\mathcal{S}$ je neodređen? Napisati skup rešenja.

Rešenje:

a) $D_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & p \\ 1 & -p & 2 \end{vmatrix} = -4 + p^2 - (4 - 3p) + (-2p + 6) = p^2 + p - 2 \Leftrightarrow p = 1 \lor p = -2$, pa je sistem određen za $p \neq 1 \land p \neq -2$.

b) Neka je $p = 0 \Rightarrow D = -2$. Tada je

$$\begin{array}{c} x + y + z = 2 \\ 2x - 2y + 0 = -2 \\ 3x - 0 + 2z = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{D_{\mathcal{S}}} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$ tj. $(x, y, z) = (2, 3, -3) \Leftrightarrow x = 2, y = 3, z = -3$.

c) Za $p = -2$ sistem $\mathcal{S}$ ekvivalentan je sa

$$\begin{array}{ccccc} x & +y & +z & = & 2 \\ 2x & -2y & -2z & = & -2 \\ 3x & +2y & +2z & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} x & +y & +z & = & 2 \\ & -4y & -4z & = & -6 \\ & -y & -z & = & -6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} x & +y & +z & = & 2 \\ & -4y & -4z & = & -6 \\ & & 0 & = & -\frac{9}{2} \end{array}$$ pa je sistem kontradiktoran.

d) Za $p = 1$ sistem $\mathcal{S}$ ekvivalentan je sa

$$\begin{array}{ccccc} x & +y & +z & = & 2 \\ 2x & -2y & +z & = & -2 \\ 3x & -y & +2z & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} x & +y & +z & = & 2 \\ & -4y & -z & = & -6 \\ & -4y & -z & = & -6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} x & +y & +z & = & 2 \\ & -4y & -z & = & -6 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$ $R_{\mathcal{S}} = \{(3y - 4, y, 6 - 4y) | y \in \mathbb{R}\}$ pa je sistem neodređen.

3. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija skupa realnih brojeva u skup realnih brojeva definisana sa $f(x) = (x-9)(x^2+5x-6) = x^3 - 4x^2 - 51x + 54$.
a) Odrediti tačke u kojim grafik funkcije seče x-osu tj. realne nule (korene) te funkcije . **b)** Odrediti znak funkcije tj. kada je pozitivna a kada je negativna. **c)** Odrediti ekstremne vrednosti funkcije f tj. minimum i maksimum. **d)** Odrediti intervale monotonosti tj. intervale u kojima funkcija raste i intervale u kojima funkcija opada. **e)** Odrediti prevojne tačke funkcije f. **f)** Nacrtati grafik funkcije f.

Rešenje a) $f(x) = (x - 9)(x^2 + 5x - 6) = (x - 9)(x - 1)(x + 6) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-6, 1, 9\}$ **b)** $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-6, 1) \cup (9, \infty)$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -6) \cup (1, 9)$ **c)** $f'(x) = 3x^2 - 8x - 51 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3, \frac{17}{3}\}$, pa je $A_{max}(-3, 144)$ i $B_{min}(\frac{17}{3}, -\frac{4900}{27})$, jer je $f''(-3) = -26 < 0$ i $f''(\frac{17}{3}) = 26 > 0$. **d)** $f \nearrow \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 8x - 51 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (\frac{17}{3}, \infty)$; $f \searrow \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 8x - 51 < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, \frac{17}{3})$ **e)** $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$, pa je $C(\frac{4}{3}, -\frac{506}{27})$ prevojna tačka.

4. Izračunati površinu ograničenu graficima funkcia $f(x) = -x^2 + x + 2$ i $g(x) = 2x$.
Rešenje: $-x^2 + x + 2 = 2x \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1 \Rightarrow P = \int_{-2}^{1}((-x^2 + x + 2) - (2x))dx = \int_{-2}^{1}(-x^2 - x + 2)dx = (-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x)|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$.

5. Dužnik je pozajmio početkom 1999. godine 1890 eura i 4300 eura krajem 2002. On se dogovorio sa svojim poveriocem da sve svoje dugove otplati tako što će anticipativno polugodišnje uplaćivati po 180 eura od početka 2000. do početka 2011. godine, a ostatak duga isplatiti u tri jednake rate i to jedna početkom 2008. druga početkom 2009. i treća krajem 2012. godine. Koliko iznosi svaka od te tri rate ako je u svim obračunima kapitalisanje polugodišnje i godišnji procenat kamate 5,8%.

Rešenje Zajedno sve uplate od po 180 eura početkom 2011-te godine iznosiće $180 \cdot r^{22} + \ldots + 180 \cdot r^2 + 180 \cdot r = 180 \cdot r \cdot (r^{21} + \ldots + 1) = 180 \cdot r \cdot \frac{r^{22}-1}{r-1}$, a krajem 2012-te godine iznosiće $180 \cdot r \cdot \frac{r^{22}-1}{r-1} \cdot r^4$. Prema tome ako i ostala sredstva eskontujemo na kraj 2012-te godine i na levu stranu jednakosti stavimo sredstva poverioca, a na desnu sredstva dužnika dobija se jednakost $1\,890 \cdot r^{28} + 4\,300 \cdot r^{20} = 180 \cdot r \cdot \frac{r^{22}-1}{r-1} \cdot r^4 + K \cdot (r^{10} + r^8 + 1)$. Kako je $r = 1 + \frac{5,8}{200} = 1,029$ to sledi da je

$K = \frac{1\,890 \cdot r^{28} + 4\,300 \cdot r^{20} - 180 \cdot r \cdot \frac{r^{22}-1}{r-1} \cdot r^4}{r^{10} + r^8 + 1} \approx \frac{4\,208,160519 + 7\,616,859607 - 6\,269,788544}{3,587889964} \approx 1\,548,328303.$ $\boxed{K \approx 1\,548,328303€}$