# Glava 1

# Procentni račun bez formula

## Šta je to $1\%$ od neke vrednosti ili mernog broja neke količine?

U nekim knjigama piše definicija $1\% = 0,01 = \frac{1}{100}$, što se ne može reći da je pogrešno, ali onda nam je pojam procenta nepotreban i niko ga ne bi koristio. Međutim kako se termin i pojam procenta masovno koristi, kako u ubičnom životu, tako i u finasijkim poslovanjima svih institucija to je ipak pogodnija definicija:

**Definicija 1.1** $\boxed{1\% \textit{ od } A \textit{ je } 0,01 \cdot A = \frac{1\%}{100\%} \cdot A = \frac{A}{100}}$

**Posledica 1.2** $\boxed{„p\text{''} \textit{ procenata od } A \textit{ je } \frac{p}{100\%} \cdot A.}$

Prema tome $1\%$ treba smatrati nedefinisanim, a definisano je $\boxed{1\% \text{ od A}}$.

Napomena: U imeniocu prthodnog razlomka $\frac{p}{100\%}$ mora da stoji znak $\%$ jer kad se uvrsti $p$ i u broiocu će biti znak $\%$, pa će na kraju $\frac{p}{100\%}$ biti običan (neimenovani broj), što je naravno neophodno.

Uokvirene činjenice koje slede, NISU FORMULE i nikako se ne smeju učiti napamet, već uvek logički izvoditi u trenutku računanja!

One su rezultat algoritma odnosno postupka koga treba pamtiti!

**Zadatak 1.3** *Ako je nešto poskupilo za $p = 17\%$ tada nova cena $N$ se dobija kada se stara cena $S$ pomnoži sa $1,17$ tj.* $\boxed{N = S \cdot 1,17.}$

**Rešenje:** Nova cena $N$ se dobija kada se na staru cenu $S$ doda povećanje $\frac{7\%}{100\%} \cdot S = \frac{7}{100} \cdot S$, (vidi 1.2), jer $\frac{S}{100}$ je jedan procenat od $S$, a $\frac{S}{100} \cdot 17$ je 17 procenata od $S$ pa je

$$N = S + \frac{S}{100} \cdot 17 = S \cdot (1 + \frac{17}{100}) = S \cdot 1,17$$

Kako je $N = S \cdot (1 + \frac{17}{100})$, a to se može zapisati i kao
$N = S \cdot (1 + \frac{17\%}{100\%})$,
to sledi da se uopšteno može napisati $\boxed{N = S \cdot (1 + \frac{p}{100\%})}$ gde je $p$ izraženo u procentima, kao što je u ovom primeru $p = 17\%$.

Broj $1 + \frac{p}{100\%}$ obeležava se sa $r$, pa je $r = 1 + \frac{p}{100\%}$,
$p = (r - 1) \cdot 100\%$ i $\boxed{N = S \cdot r}$.

**Zadatak 1.4** *Ako je nešto pojeftinilo za $p = 17\%$ tada nova cena $N$ se dobija kada se stara cena $S$ pomnoži sa $0,83$ tj.* $\boxed{N = S \cdot 0,83.}$

**Rešenje:** Nova cena $N$ se dobija kada se od stare cene $S$ oduzme smanjenje $\frac{7\%}{100\%} \cdot S = \frac{7}{100} \cdot S$, (vidi 1.2), jer $\frac{S}{100}$ je jedan procenat od $S$, a $\frac{S}{100} \cdot 17$ je 17 procenata od $S$ pa je

$$N = S - \frac{S}{100} \cdot 17 = S \cdot (1 - \frac{17}{100}) = S \cdot 0,83$$

Kako je $N = S \cdot (1 - \frac{17}{100})$, a to se može zapisati i kao
$N = S \cdot (1 - \frac{17\%}{100\%})$,
to sledi da se uopšteno može napisati $\boxed{N = S \cdot (1 - \frac{p}{100\%})}$ gde je $p$ izraženo u procentima, kao što je u ovom primeru $p = 17\%$.

Broj $1 - \frac{p}{100\%}$ obeležava se sa $r$, pa je $r = 1 - \frac{p}{100\%}$,
$p = (1 - r) \cdot 100\%$ i $\boxed{N = S \cdot r}$.

Ako se cena robe promenila za $p$ procenata, tada je promena cene u slučaju poskupljenja $\boxed{N - S = S \cdot \frac{p}{100\%}}$ (vidi posledicu 1.2)

ili u slučaju pojeftinjenja $\boxed{S - N = S \cdot \frac{p}{100\%}}$, (vidi posledicu 1.2) gde je $N$ nova cena i $S$ stara cena.

U nekim udžbenicima se umesto formule $N = S \cdot (1 + \frac{p}{100\%})$ piše formula $N = S \cdot (1 + p)$, pa kada u tekstu zadatka piše $p = 17\%$ oni u formulu $N = S \cdot (1 + p)$ umesto $p$ uvršćavaju p=0,17. Naravno da se dobija isti rezultat, ali kao što rekosmo tada bi time faktički izbacili pojam i termin procenta kao jedinice mere, što je u suprotnosti sa praksom u običnom životu i svim institucijama.

Naravno da je i nedosledno, pre svega metodički a i stručno, da ako u zadtku piše $p = 17\%$ da se onda zamenjuje $p = 0,17$ umesto onoga što piše!

Prednost zapisa $N = S \cdot (1 + p)$ u odnosu na $N = S \cdot (1 + \frac{p}{100\%})$ je samo što je kraći za onih 100% u imeniocu, ali je mnogo veća šteta sa metodičkog i stručnog aspekta. Zbog toga ostajemo pri $S \cdot (1 + \frac{p}{100\%})$.

U svim primerima do sada veličina $S$ je bila GLAVNICA, odnosno veličina koju smo smatrali za 100%

**Zadatak 1.5** *Ako u nekoj mešavini ima a kiligrama materje A i b kilograma materje B, tada procenat* $p_A$ *materje A u mešavini iznosi* $\boxed{p_A = \frac{a}{a+b} \cdot 100\%}$, *a procenat* $p_B$ *materije B u mešavini je* $\boxed{p_B = \frac{b}{a+b} \cdot 100\%}$.

**Rešenje:** Ovo takođe nisu formule, već posledice od 1.2, jer na osnovu nje je $\cdot \frac{p_A}{100\%}(a+b) = a$ i $\cdot \frac{p_B}{100\%}(a+b) = b$, odakle sledi tvrđenje zadatka.

**Zadatak 1.6** *Ako je cena robe* 100 *dinara i ako je ona poskupila za* 40% *a zatim pojeftinila za* 30% *kolika je nova cena?*

Rešenje: $100 \cdot 1,40 \cdot 0,70 = 100 \cdot 0,98 = 98$ dinara.

**Zadatak 1.7** *Masa nekoga tela se povećala sa 80kg na 100kg. Za koliko procenata p se povećala masa toga tela?*

Rešenje: $p = \frac{100-80}{80} \cdot 100\% = 25\%$.

**Zadatak 1.8** *Masa nekoga tela se smanjila sa 100kg na 80kg. Za koliko procenata p se smanjila masa toga tela?*

Rešenje: $p = \frac{100-80}{100} \cdot 100\% = 20\%$.

**Činjenica 1.9**

| |
|---|
| Ako se od dve veličine koje se upoređuju (naprimer traži njihova razlika u procentima) veća uzme za glavnicu tj. za 100%, tada se obračuni zovu račun „niže sto” |

**Činjenica 1.10**

Ako se od dve veličine koje se upoređuju (naprimer traži njihova razlika u procentima) manja uzme za glavnicu tj. za 100%, tada se obračuni zovu račun „više sto”

Putpuno je nebitno kako se koji račun zove, bitno je da je u svakom problemu jasno rečeno koju veličinu uzimamo za glavnicu tj. za 100%.

**Zadatak 1.11** *Nabavna cena je* $N = 80$ *dinara, a prodajna cena je* $P = 100$ *dinara. Kolika je razlika u procentima* $p$ *između te dve sume novca?*

Rešenje: $p = 25\%$ ili $p = 20\%$, zavisno od toga koju sumu uzimamo za 100%, tj. za glavnicu, odnosno prodajna cena je za 25% veća od nabavne (račun „više sto”), dok je nabavna cena manja za 20% od prodajne (račun „niže sto”.)

Jezikom ekonomista se to kaže rabat je 20% a marža je 25%

**Marža** M i **rabat** R, u dinarima su jednake vrednosti, a u procentima različite. Zašto?

Razlika između prodajne cene P i nabavne cene N u dinarima jednaka je i marži M i rabatu R odnosno M=R. Međutim u procentima razlike nisu iste, jer ako P uzmemo za glavnicu (tj. za 100% ), tada razlika R=P-N zove se rabat i u procentima je $p_R = \frac{\mathsf{P}-\mathsf{N}}{\mathsf{P}} \cdot 100\%$ , a ako N uzmemo za glavnicu (tj. za 100% ), tada razlika M=P-N zove se marža i u procentima je $p_M = \frac{\mathsf{P}-\mathsf{N}}{\mathsf{N}} \cdot 100\%$ pa sledi da je $p_M = \frac{100\%}{100\% - p_R} p_R$.

**Zadatak 1.12** *Aca ima* $a$ *dinara, a Dejan ima* $b \geq a$ *dinara. Kolika je razlika u procentima* $p$ *između te dve sume novca?*

Rešenje: $p = \frac{b-a}{b} \cdot 100\%$ ako sumu $b$ uzimamo za 100% tj. za glavnicu ili $p = \frac{b-a}{a} \cdot 100\%$, ako sumu $a$ uzimamo za za 100% tj. za glavnicu.

**Zadatak 1.13** *Ako se neka suma* $S$ *povećala za* 25% *za koliko procenata* $p$ *treba smanjiti novu sumu da bi se vratili na istu sumu* $S$*?*

Rešenje: $S \cdot 1,25 \cdot r = S$ odakle sledi $r = \frac{1}{1,25} = 0,8 = 0,80$, pa je $p = 20\%$ (ili ko hoće može da računa: $p = (1 - r) \cdot 100\% = 20\%$)

**Zadatak 1.14** *Ako se neka suma $S$ smanjila za 20% za koliko procenata $p$ treba povećati novu sumu da bi se vratili na istu sumu $S$?*

Rešenje: $S \cdot 0,80 \cdot r = S$ odakle je $r = \frac{1}{0,80} = 1,25$, pa je $p = 25\%$
(ili ko hoće može da računa: $p = (r-1) \cdot 100\% = 25\%$

**Zadatak 1.15** *Neka roba je poskupela za 11%, zatim pojeftinila za 9% i nakon toga poskupela za 9% Kolika je ukupna promena cene u procentima ?*

Rešenje: $S \cdot 1,11 \cdot 0,91 \cdot 1,09 = N \Leftrightarrow N = 1,101009 \cdot S \Rightarrow r = 1,101009$ što znači da je ukupna promena cene $10,1009\%$

**Zadatak 1.16** *Sveže smokve sadrže $p_1 = 72\%$ vode, a suve $p_2 = 20\%$ vode. Koliko se kilograma „m" suvih smokava može dobiti sušenjem $M = 100$ kilograma svežih smokava ? Koliko procenata „p" gube na težini smokve prilikom sušenja ?*

Rešenje: Izjednačavanjem „nevodenog" dela materje u svežim i suvim smokvama dobija se

$$m \cdot 0,80 = 0,28 \cdot 100$$

pa je $m = \frac{0,28 \cdot 100}{0,8} = 35\,kg$ i $p = \frac{M-m}{M} \cdot 100\% = \frac{100-35}{100} \cdot 100\% = 65\%$.

**Zadatak 1.17** *U posudi A nalzi se 9 litara sode, a u posudi B nalazi se 9 litara vina. Iz posude A uzme se 1 litar sode, sipa u posudu B i dobro promeša sa onih 9 litara vina. Zatim se iz posude B uzme 1 litar te mešavine i sipa u posudu A. Da li je procenat $p_1$ sode u posudi B veći, manji ili jednak u odnosu na procenat $p_2$ vina u posudi A?*

Zašto je ovaj zadatak interesantan? Interesantan je što se može rešiti na dva načina. Jedan način je efektivnim računajem odgovarajućih procenata, a drugi je logički bez ikakvog računaja!

**Zadatak 1.18** *U posudi A nalzi se $n$ litara sode, a u posudi B nalazi se $n$ litara vina. Iz posude A uzme se 1 litar sode, sipa u posudu B i dobro promeša sa onih $n$ litara vina. Zatim se iz posude B uzme 1 litar te mešavine i sipa u posudu A. Koliki je procenat $p_1$ sode u posudi B, a koliki je procenat $p_2$ vina u posudi A?*

**Zadatak 1.19** *Neki konjak ima 40% alkohola, a viski 45% alkohola. Ako se pomeša 2l konjaka sa 3l viskija, koliki će biti procenat alkohola u mešavini konjaka i viskija ?*

Rešenje: $\frac{2 \cdot 40\% + 3 \cdot 45\%}{2+3} = 43\%$

Zadaci 1.19, 1.20, 1.21, 1.22 i 1.24 su suštinski isti, samo u malo drukčijoj interpretaciji!

**Zadatak 1.20** *Neki konjak ima $p_1$ procenata alkohola, a neki viski ima $p_2$ procenata alkohola. Ako se pomeša c litara konjaka sa w litara viskija, koliki će biti procenat $p$ alkohola u mešavini $M = c + w$ konjaka i viskija?*

Rešenje:

$$M = \frac{c}{c+w}M + \frac{w}{c+w}M =$$

$$\left(\frac{p_1}{100} + 1 - \frac{p_1}{100}\right)\frac{c}{c+w}M + \left(\frac{p_2}{100} + 1 - \frac{p_2}{100}\right)\frac{w}{c+w}M =$$

$$\underbrace{\frac{p_1}{100}\frac{c}{c+w}M + \frac{p_2}{100}\frac{w}{c+w}M}_{alkohol} + \underbrace{\left(1 - \frac{p_1}{100}\right)\frac{c}{c+w}M + \left(1 - \frac{p_2}{100}\right)\frac{w}{c+w}M}_{nealkoholni\ \ ostatak}$$

$$= \frac{cp_1 + wp_2}{c+w}\frac{M}{100} + \frac{c(100-p_1) + w(100-p_2)}{c+w}\frac{M}{100} =$$

$$= p\frac{M}{100} + (100-p)\frac{M}{100} = M,$$

što znači da je $\boxed{p = \frac{cp_1 + wp_2}{c+w}}$

**Zadatak 1.21** *Neki konjak ima $p_1$ procenata alkohola, a neki viski ima $p_2$ procenata alkohola. Koliki je procenat p alkohola u mešavini konjaka i viskija ako je odnos količine viskija i konjaka jednak q?*

Rešenje: Ako u prethodnom rešenju $p = \frac{cp_1 + wp_2}{c+w}$ izvršimo skraćivanje razlomka sa $c$ i zatim uvedemo smenu $\frac{w}{c} = q$ dobija se $p = \frac{p_1 + \frac{w}{c}p_2}{1 + \frac{w}{c}}$ tj. $\boxed{p = \frac{p_1 + qp_2}{1+q}}$.

**Zadatak 1.22** *Neki konjak ima $p_1 = 40\%$ procenata alkohola, a neki viski ima $p_2 = 45\%$ procenata alkohola. Koliki je procenat p alkohola u mešavini konjaka i viskija ako je $p_3 = 60\%$ procenat konjaka u toj mešavini?*

Rešenje: Ako u prethodnom rešenju $p = \frac{cp_1+wp_2}{c+w} = \frac{p_1+\frac{w}{c}p_2}{\frac{c+w}{c}}$ uvrstimo (Vidi 5) $\frac{c}{c+w} \cdot 100\% = p_3$ tj. $\frac{c+w}{c} = \frac{100\%}{p_3}$ ili $\frac{w}{c} = \frac{100\%}{p_3} - 1$ dobija se $p = \frac{p_1+(\frac{100\%}{p_3}-1)p_2}{\frac{100\%}{p_3}}$ tj. $p = \frac{p_1p_3+(100\%-p_3)p_2}{100}$ odnosno $\boxed{p = \frac{p_3}{100\%}(p_1 - p_2) + p_2.}$ Konkretno $p = \frac{p_3}{100\%}(p_1 - p_2) + p_2 = \frac{60\%}{100\%}(40\% - 45\%) + 45\% = 0,6 \cdot (-5\%) + 45\% = -3\% + 45\% = 42\%$.

**Zadatak 1.23** *Neka fabrika proizvodi samo proizvode A i proizvode B. Procenat profita u proizvodnji proizvoda A je* $p_1 = 57\%$*, a u proizvodnji proizvoda B je* $p_2 = 37\%$*. Ako je* $p_3 = 55\%$ *procenat prihoda od proizvodnje proizvoda A u odnosu na ukupni prihod fabrike, koliki je procenat p profita u ukupnoj proizvodnji fabrike ?* *R:* $p = 48\%$

**Zadatak 1.24** *Neka u rakiji ima 48% alkohola, u viskiju 46% alkohola, a u konjaku 40% alkohola. Ako se pomešaju 1dl rakije, 2dl viskija i 7dl konjaka, koliki će biti procenat alkohola u dobijenoj smeši ?*

Rešenje: $p = \frac{k_1p_1+k_2p_2+k_3p_3}{k_1+k_2+k_3} = \frac{1\cdot48\%+2\cdot46\%+7\cdot40\%}{1+2+7} = 42\%$. Vidi 1.20.

**Zadatak 1.25** *Sveže smokve sadrže* $p_1$ *procenata vode, a suve* $p_2$ *procenata vode. Koliko procenata p gube na težini smokve prilikom sušenja?*

Rešenje: Ako je $m$ broj kilograma suvih smokava, a $M$ broj kilograma svežih smokava, tada izjednačavanjem „nevodenog" dela materje u svežim i suvim smokvama sledi $m \cdot \frac{100\%-p_2}{100\%} = M \cdot \frac{100\%-p_1}{100\%}$ i odatle je $\frac{m}{M} = \frac{100\%-p_1}{100\%-p_2}$, pa je

$p = \frac{M-m}{M} \cdot 100\% = (1 - \frac{100\%-p_1}{100\%-p_2}) \cdot 100\% = \frac{p_1-p_2}{100\%-p_2} \cdot 100\%$.

## RAČUN DIREKTNE PROPORCIONALNOSTI I OBRNUTE (INDIREKTNE) PROPORCIONALNOSTI

**Zadatak 1.26** *Od* $55kg$ *brašna dobije se* $88kg$ *hleba. Koliko treba kilograma brašna da bi se dobilo* $104kg$ *hleba ?*

**Rešenje** Jasno je da su količina brašna i količina hleba direktno proporcionalne, jer ako ima više brašna biće i više hleba. Kako imamo da

$$\downarrow\begin{array}{l} 55\text{kg brašna daje } 88\text{kg hleba} \\ x\,\text{kg brašna daje } 104\text{kg hleba} \end{array}\downarrow \qquad \text{to sledi:}$$

$$55 : x = 88 : 104 \Leftrightarrow 55 \cdot 104 = 88 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{55 \cdot 104}{88} = 65\text{kg brašna.}$$

U ovom primeru imamo da od $x$ kilograma brašna se dobija $y = f(x)$ kilograma hleba pri čemu je $\boxed{f(x) = \frac{8}{5} \cdot x}$ tj. $x = \frac{5}{8} \cdot f(x)$. Prema tome veličine $x$ i $f(x)$ su direktno proporcionalne jer je $\boxed{f(x) = k \cdot x}$, gde je $k = \frac{8}{5}$ koeficijenat te proporcionalnosti (ili $x = \frac{1}{k} \cdot f(x)$ pa je onda koeficijenat proporcionalnosti $\frac{1}{k}$). Znači funkcija $f$ određuje koliko će se dobiti kilograma hleba od date količine brašna u kilogramima.

**Zadatak 1.27** *Neki bazen,* $6$ *slavina napuni za* $8$ *dana. Za koliko dana će isti bazen napuniti* $12$ *slavina ako sve slavine pune bazen istim brzinama ?*

**Rešenje** U ovom primeru su broj slavina $x$ i broj dana $f(x)$ obrnuto proporcionalne veličine jer za veći broj slavina trebaće manji broj dana da se napuni isti bazen. Kako

$$\downarrow\begin{array}{l} 6 \text{ slavina napuni bazen za } 8 \text{ dana} \\ 12 \text{ slavina napuni bazen za } x \text{ dana} \end{array}\uparrow \qquad \text{sledi}$$

$6 : 12 = x : 8 \Leftrightarrow 6 \cdot 8 = 12 \cdot x \Leftrightarrow x = 4$ $\big($a ne $6 : 12 = 8 : x$ kako bi bilo kod direktne proporcionalnosti kao u prethodnom$\big)$.

Prema tome ako

$$\downarrow\begin{array}{l} x_1 \text{ slavina napuni bazen za } f(x_1) \text{ dana} \\ x_2 \text{ slavina napuni bazen za} f(x_2) \text{ dana} \end{array}\uparrow \qquad \text{tada sledi}$$

$x_1 : x_2 = f(x_2) : f(x_1) \Leftrightarrow x_1 \cdot f(x_1) = x_2 \cdot f(x_2) = k = x \cdot f(x) = 48$, odnosno $\boxed{f(x) = \frac{k}{x}} = \frac{48}{x}$.

**Činjenica 1.28**

Neka su $x$ i $f(x)$ odgovarajuće veličine u bilo direktnoj, bilo obrnutoj proporcionalnosti. Ako je $x \in \{x_1, x_2\}$, to zapisujemo:

$$\star : \begin{array}{cc} x_1 & f(x_1) \\ x_2 & f(x_2) \end{array}$$

U DIREKTNOJ proporcionalnosti iz $\star$ sledi $\boxed{x_1 : x_2 = f(x_1) : f(x_2)}$,

U OBRNUTOJ proporcionalnosti iz $\star$ sledi $\boxed{x_1 : x_2 = f(x_2) : f(x_1)}$.

## RAZNI ZADACI

**Zadatak 1.29** *Bata popije balon vina za 3 sata i isti balon vina Boban popije za 7 sati. Za koliko minuta će biti popijen taj balon vina ako Bata i Boban piju istovremeno i svako od njih uvek ima stalnu (konstantnu) brzinu pijenja?*

Rešenje: $\frac{x}{3} + \frac{x}{7} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{21}{10}h = 2h\ 6\,min = 126\,min$

**Zadatak 1.30** *Sat pokazuje tačno 0h. Nakon $x$ minuta će se prvi put poklopiti mala i velika kazaljka. Izračunati $x$.*

Rešenje: $x - \frac{x}{12} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{12}{11}h = 1h\ 5min\ 27\frac{3}{11}sec.$

**Zadatak 1.31** *Koliko ima različitih položaja kazaljki na časovniku u kojima se one poklapaju?*

Rešenje: Pokapaju se tačno 11 puta u sledećim vremenima:
$0h,\ \frac{12}{11}h,\ \frac{24}{11}h,\ \frac{36}{11}h,\ \frac{48}{11}h,\ \frac{60}{11}h,\ \frac{72}{11}h,\ \frac{84}{11}h,\ \frac{96}{11}h,\ \frac{108}{11}h,\ \frac{120}{11}h.$

**Zadatak 1.32** *Sat pokazuje 00h. Nakon $x$ minuta ugao između male i velike kazaljke će prvi put biti $180°$. Izračunati $x$.*

Rešenje: $x - \frac{x}{12} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6}{11}h = 32,\overline{72}min = 32\frac{8}{11}min = 32min\ 43\frac{7}{11}sec.$