REŠENJA ZADATAKA SA PISMENOG ISPITA IZ MATEMATIKE NA VPŠSS U NOVOM SADU 05.04.2008.

1. grupa

1. Proveriti da li je formula $F : ((p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ tautologija.

2. Pomoću inverzne matrice naći rešenja sistema jednačina

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_2 \quad + x_3 &= 1 \\ 2x_1 \quad +3x_2 \quad - x_3 &= 4 \\ x_1 \quad -5x_2 \quad +3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

3. Naći intervale monotonosti, ekstremne vrednosti i prevojne tačke funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 21x + 1$$

4. Izračunati integral $\int (x^3 + 3x - 1)^{10} \cdot (x^2 + 1)\, dx$

5. Banka je klijentu odobrila potrošački kredit u iznosu od 200 000 dinara, uz učešće od 35% i otplatu ostatka duga u roku od 50 meseci po kamatnoj stopi od 16%. Odrediti ukupan dug i prosečnu mesečnu ratu.

REŠENJA:

1.

p	q	r	$p \vee q$	$q \Rightarrow r$	$(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$F : ((p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$

2.

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_2 \quad + x_3 &= 1 \\ 2x_1 \quad +3x_2 \quad - x_3 &= 4 \\ x_1 \quad -5x_2 \quad +3x_3 &= -1 \end{aligned} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B} \Leftrightarrow A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Kako je $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^*$, to znači da je $X = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^* \cdot B$ Da bismo odredili X potrebno je da izračunamo $\det(A)$ i A^*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{matrix} = -2$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} \\ A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -7 & 2 & 3 \\ -13 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* \cdot B = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -7 & 2 & 3 \\ -13 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.

Prvi izvod funkcije: $f'(x) = (\frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 21x + 1)' = x^2 - 10x + 21$

Ekstremne vrednosti: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3 \vee x_2 = 7$

Kandidati za ekstremne vrednosti su prema tome $x_1 = 3$ i $x_2 = 7$. Da bismo proverili prirodu ekstrema potreban nam je drugi izvod funkcije: $f''(x) = (f'(x))' = (x^2 - 10x + 21)' = 2x - 10$

Prvo ispitujemo prirodu ekstrema u $x_1 = 3$

$f''(x_1) = f''(3) = 2 \cdot 3 - 10 = 6 - 10 = -4 < 0$ Znači da funkcija ima maksimum u tački $A_{max}(3, f(3))$.

Kako je $f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 21 \cdot 3 + 1 = 28$ onda je maksimum u $A_{max}(3, 28)$

Na isti način ispitujemo prirodu ekstrema u $x_2 = 7$

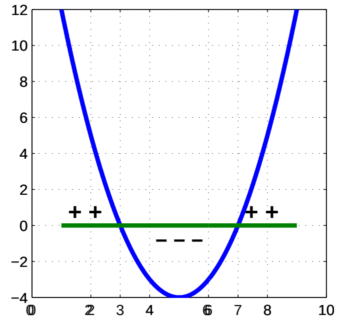
$f''(x_2) = f''(57) = 2 \cdot 7 - 10 = 14 - 10 = 4 > 0$ Znači da funkcija ima minimum u tački $B_{min}(7, f(7))$.

Kako je $f(7) = \frac{1}{3} \cdot 7^3 - 5 \cdot 7^2 + 21 \cdot 7 + 1 = \frac{52}{3}$ onda je minimum u $B_{min}(7, \frac{52}{3})$

Intervali monotonosti: Sa slike prvog izvoda funkcije možemo pročitati kada je prvi izvod pozitivan, a kada je negativan:

$f \nearrow \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3) \cup (7, \infty)$

$f \searrow \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (3, 7)$



Prevojne tačke:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$, pa je prevojna tačka data sa $C(5, f(5))$

Pošto je $f(5) = \frac{1}{3} \cdot 5^3 - 5 \cdot 5^2 + 21 \cdot 5 + 1 = \frac{68}{3}$ onda je prevojna tačka $C(5, \frac{68}{3})$

4.

Uvodeći smenu $t = x^3 + 3x - 1$ dobijamo $dt = (3x^2 + 3)dx \Leftrightarrow dt = 3(x^2 + 1)dx \Leftrightarrow (x^2 + 1)dx = \frac{1}{3}dt$ pa je

$$\int (x^3 + 3x - 1)^{10} \cdot (x^2 + 1)\, dx = \int t^{10} \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int t^{10} dt = \frac{1}{3} \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{t^{11}}{33} + C = \frac{(x^3 + 3x - 1)^{11}}{33} + C$$

5.

Neka je $G = 200\,000$ iznos odobrenog krediita. Sa p_u ćemo označiti procenat učešća pa je $p_u = 35\%$. Označimo učešće sa U, dobijamo ga sledećim postupkom:

$$G : U = 100 : p_u \Leftrightarrow 200000 : U = 100 : 35 \Leftrightarrow U \cdot 100 = 200000 \cdot 35 \Leftrightarrow U = \frac{200000 \cdot 35}{100} = 70000$$

Iznos koji treba otplatiti u roku 50 meseci ($m = 50$) uz kamatu $p = 16\%$ je tada

$$K = G - U = 200000 - 70000 = 130000$$

Za određivanje ukupnog duga D i prosečne mesečne rate b nam je potreban kamatni koeficijent:

$$k = \frac{(m+1)p}{2400} = \frac{(50+1) \cdot 16}{2400} = 0,34$$

Ukupni dug je : $D = K \cdot (1 + k) = 130000 \cdot (1 + 0,34) = 174200$ din

prosečna mesečna rata je: $b = \frac{D}{m} = \frac{174200}{50} = 3484$ din

$\boxed{\text{2. grupa}}$

1. Proveriti da li je formula $F : (p \Rightarrow (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$ tautologija.

2. Pomoću inverzne matrice naći rešenja sistema jednačina

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & -2\,x_2 & +\,x_3 = & -4 \\ 2\,x_1 & +\,x_2 & -\,x_3 = & 0 \\ 3\,x_1 & +2\,x_2 & -2\,x_3 = & 1 \end{array}$$

3. Naći intervale monotonosti, ekstremne vrednosti i prevojne tačke funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x + 2$$

4. Izračunati integral $\int (x^2 - 8x + 1)^{12} \cdot (x - 4)\,dx$

5. U prodavnici računara je prodat laptop računar *APPLE MacBook Pro*, po ceni od 150 000 din, pri čemu je kupcu na licu mesta odobren potrošački kredit uz učešće od 20% i otplatu ostatka duga u roku od 36 meseci po kamatnoj stopi od 12%. Odrediti ukupan dug i prosečnu mesečnu ratu.

REŠENJA:

1.

p	q	r	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	$F : (p \Rightarrow (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$

2.

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -2\,x_2 & +1\,x_3 & = & -4 \\ 2\,x_1 & +1\,x_2 & -1\,x_3 & = & 0 \\ 3\,x_1 & +2\,x_2 & -2\,x_3 & = & 1 \end{array} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \Leftrightarrow A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Kako je $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^*$, to znači da je $X = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^* \cdot B$ Da bismo odredili X potrebno je da izračunamo $\det(A)$ i A^*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{|rrr|rr} 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 3 & 2 \end{array} = -1$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} \\ A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* \cdot B = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -8 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3.

Prvi izvod funkcije: $f'(x) = (\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x + 2)' = x^2 - 8x + 12$

Ekstremne vrednosti: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 \vee x_2 = 6$

Kandidati za ekstremne vrednosti su prema tome $x_1 = 2$ i $x_2 = 6$. Da bismo proverili prirodu ekstrema potreban nam je drugi izvod funkcije: $f''(x) = (f'(x))' = (x^2 - 8x + 12)' = 2x - 8$

Prvo ispitujemo prirodu ekstrema u $x_1 = 2$

$f''(x_1) = f''(2) = 2 \cdot 2 - 8 = 4 - 8 = -4 < 0$ Znači da funkcija ima maksimum u tački $A_{max}(2, f(2))$.

Kako je $f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + 2 = \frac{38}{3}$ onda je maksimum u $A_{max}(2, \frac{38}{3})$

Na isti način ispitujemo prirodu ekstrema u $x_2 = 6$

$f''(x_2) = f''(6) = 2 \cdot 6 - 8 = 12 - 8 = 4 > 0$ Znači da funkcija ima minimum u tački $B_{min}(6, f(6))$.

Kako je $f(6) = \frac{1}{3} \cdot 6^3 - 4 \cdot 6^2 + 12 \cdot 6 + 2 = 2$ onda je minimum u $B_{min}(6, 2)$

Intervali monotonosti: Sa slike prvog izvoda funkcije možemo pročitati kada je prvi izvod pozitivan, a kada je negativan:

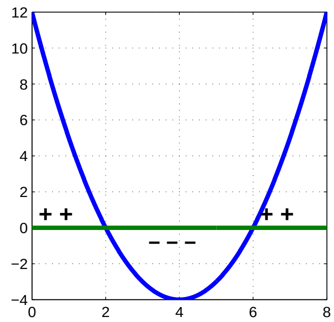
$f \nearrow \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (6, \infty)$

$f \searrow \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2, 6)$

Prevojne tačke:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$, pa je prevojna tačka data sa $C(4, f(4))$

Pošto je $f(4) = \frac{1}{3} \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2 + 12 \cdot 4 + 2 = \frac{22}{3}$, onda je prevojna tačka $C(4, \frac{22}{3})$



4.

Uvodeći smenu $t = x^2 - 8x + 1$ dobijamo $dt = (2x - 8)dx \Leftrightarrow dt = 2(x - 4)dx \Leftrightarrow (x - 4)dx = \frac{1}{2}dt$ pa je

$$\int (x^2 - 8x + 1)^{12} \cdot (x - 4)\, dx = \int t^{12} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^{12} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{13}}{13} + C = \frac{t^{13}}{26} + C = \frac{(x^2 - 8x + 1)^{13}}{26} + C$$

5.

Neka je $G = 150\,000$ cena kupljenog računara. Sa p_u ćemo označiti procenat učešća pa je $p_u = 20\%$. Označimo učešće sa U, dobijamo ga sledećim postupkom:

$$G : U = 100 : p_u \Leftrightarrow 150000 : U = 100 : 20 \Leftrightarrow U \cdot 100 = 150000 \cdot 20 \Leftrightarrow U = \frac{150000 \cdot 20}{100} = 30000$$

Iznos koji treba otplatiti u roku 36 meseci ($m = 36$) uz kamatu $p = 12\%$ je tada

$$K = G - U = 150000 - 30000 = 120000$$

Za određivanje ukupnog duga D i prosečne mesečne rate b nam je potreban kamatni koeficijent:

$$k = \frac{(m + 1)p}{2400} = \frac{(36 + 1) \cdot 12}{2400} = 0,185$$

Ukupni dug je : $D = K \cdot (1 + k) = 120000 \cdot (1 + 0,185) = 142200$ din

prosečna mesečna rata je: $b = \frac{D}{m} = \frac{142200}{36} = 3950$ din