REŠENJA ZADATAKA SA PISMENOG ISPITA IZ MATEMATIKE NA VPŠSS U NOVOM SADU 09.05.2008.

1. grupa

1. Dokazati skupovnu jednakost: $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

2. Pomoću inverzne matrice naći rešenja sistema jednačina

$$\begin{array}{rrrcr} 3\,x_1 & -2\,x_2 & +x_3 & = & 4 \\ x_1 & +2\,x_2 & -3\,x_3 & = & -2 \\ 2\,x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 1 \end{array}$$

3. Naći intervale monotonosti, ekstremne vrednosti i prevojne tačke funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$$

4. Izračunati integral $\int x^2 e^{4x^3-1} dx$

5. Na dan 09.05.2008. eskontovana je menica sa rokom dospeća 12.08.2008. Ako je eskontna stopa 20%, a dužnik je po odbitku eskonta primio 51150 dinara. Odrediti nominalnu vrednost, **komercijalni** eskont i ispisati šemu eskonta. Obračun vršiti po modelu (k,360) tj. dani se računaju prema kalendaru, a godina ima 360 dana!

REŠENJA:

1.
$$\begin{aligned} x \in A \backslash (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B) \wedge \neg(x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \wedge \neg(x \in B) \wedge \neg(x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B) \wedge x \in A \wedge \neg(x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \backslash B \wedge x \in A \backslash C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \backslash B) \cap (A \backslash C) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{array}{rrrcr} 3\,x_1 & -2\,x_2 & +x_3 & = & 4 \\ x_1 & +2\,x_2 & -3\,x_3 & = & -2 \\ 2\,x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 1 \end{array} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \Leftrightarrow A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$ Kako

je $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^*$, to znači da je $X = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^* \cdot B$ Da bismo odredili X potrebno je da izračunamo $\det(A)$ i A^*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{|rrr|rr} 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} = 10$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} \\ A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -5 & -5 & 10 \\ -3 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* \cdot B = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -5 & -5 & 10 \\ -3 & -7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.

Prvi izvod funkcije: $f'(x) = (\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1)' = x^2 - 2x - 3$

Ekstremne vrednosti: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 \vee x_2 = 3$

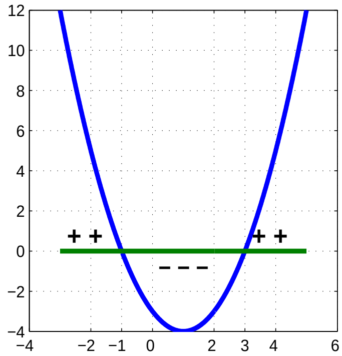
Kandidati za ekstremne vrednosti su prema tome $x_1 = -1$ i $x_2 = 3$. Da bismo proverili prirodu ekstrema potreban nam je drugi izvod funkcije: $f''(x) = (f'(x))' = (x^2 - 2x - 3)' = 2x - 2$

Prvo ispitujemo prirodu ekstrema u $x_1 = -1$

$f''(x_1) = f''(-1) = 2 \cdot (-1) - 2 = -4 < 0$ Znači da funkcija ima maksimum u tački $A_{max}(-1, f(-1))$. Kako je $f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 = \frac{8}{3}$ onda je maksimum u $A_{max}(-1, \frac{8}{3})$

Na isti način ispitujemo prirodu ekstrema u $x_2 = 3$

$f''(x_2) = f''(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4 > 0$ Znači da funkcija ima minimum u tački $B_{min}(3, f(3))$. Kako je $f(6) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = -8$ onda je minimum u $B_{min}(3, -8)$



Intervali monotonosti: Sa slike prvog izvoda funkcije možemo pročitati kada je prvi izvod pozitivan, a kada je negativan:

$f \nearrow \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$

$f \searrow \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$

Prevojne tačke:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$, pa je prevojna tačka data sa $C(1, f(1))$

Pošto je $f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -\frac{8}{3}$, onda je prevojna tačka $C(1, -\frac{8}{3})$

4.

Uvodeći smenu $t = 4x^3 - 1$ dobijamo $dt = 12x^2dx \Leftrightarrow x^2dx = \frac{1}{12}dt$ pa je

$$\int x^2 e^{4x^3-1}dx = \int e^t \frac{1}{12}dt = \frac{1}{12}\int e^t dt = \frac{1}{12}e^t + C = \frac{1}{12}e^{4x^3-1} + C$$

5.

Ako sa K označimo nominalnu vrednost menice i sa e **komercijalni** eskont, tada iz zadatka sledi da je eskontovana vrednost menice $K - e = 51150$, a eskontna stopa $p = 20\%$. Budući da se obračun vrši po modelu (k,360), onda od dana eskontovanja 09.05.2008. do dana dospeća menice 12.08.2008. ima $d = 95$ dana i važi:

$$\begin{aligned} K : e = 36000 : pd \quad &\Leftrightarrow \quad K : (K - e) = 36000 : (36000 - pd) \\ &\Leftrightarrow \quad K \cdot (36000 - pd) = (K - e) \cdot 36000 \\ &\Leftrightarrow \quad K = \frac{(K - e) \cdot 36000}{(36000 - pd)} = \frac{51150 \cdot 36000}{(36000 - 20 \cdot 95)} = 54000 \end{aligned}$$

$$e = K - (K - e) = 54000 - 51150 = 2850$$

Šema eskonta:

Eskontovano		09.05.2008
Nominalna vrednost	54000 din.	12.08.2008
Eskont(95 dana/20%)	−2850 din.	
Eskontovana vrednost	51150 din.	09.05.2008

$\boxed{\text{2. grupa}}$

1. Dokazati skupovnu jednakost: $A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$

2. Pomoću inverzne matrice naći rešenja sistema jednačina

$$\begin{array}{rrrcr} 4x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -3 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & -5 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -1 \end{array}$$

3. Naći intervale monotonosti, ekstremne vrednosti i prevojne tačke funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+8x+1$$

4. Izračunati integral $\displaystyle\int\frac{x^5}{3x^6+2}dx$

5. Na dan 09.05.2008. eskontovana je menica sa rokom dospeća 06.09.2008. Ako je eskontna stopa 24%, a dužnik je po odbitku eskonta primio 78200 dinara. Odrediti nominalnu vrednost, **komercijalni** eskont i ispisati šemu eskonta. Obračun vršiti po modelu (k,360) tj. dani se računaju prema kalendaru, a godina ima 360 dana!

REŠENJA:

1.
$$\begin{aligned} x\in A\backslash(B\cap C) &\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\cap C)\\ &\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\wedge x\in C)\\ &\Leftrightarrow x\in A\wedge(\neg(x\in B)\vee\neg(x\in C))\\ &\Leftrightarrow (x\in A\wedge\neg(x\in B)\vee(x\in A\wedge\neg(x\in C))\\ &\Leftrightarrow x\in A\backslash B\vee x\in A\backslash C\\ &\Leftrightarrow x\in(A\backslash B)\cup(A\backslash C)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{array}{rrrcr} 4x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -3 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & -5 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -1 \end{array} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B}\Leftrightarrow A\cdot X=B\Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B$$ Kako je

$A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\cdot A^*$, to znači da je $X=\dfrac{1}{\det(A)}\cdot A^*\cdot B$ Da bismo odredili X potrebno je da izračunamo $\det(A)$ i A^*

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{array}{|rrr|rr} 4 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}=-2$$

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} \\ A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & -9 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* \cdot B = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & -9 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

3.

Prvi izvod funkcije: $f'(x) = (-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 8x + 1)' = -x^2 + 2x + 8$

<u>Ekstremne vrednosti</u>: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 4$

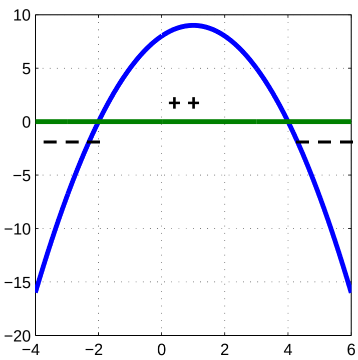
Kandidati za ekstremne vrednosti su prema tome $x_1 = -2$ i $x_2 = 4$. Da bismo proverili prirodu ekstrema potreban nam je drugi izvod funkcije: $f''(x) = (f'(x))' = (-x^2 + 2x + 8)' = -2x + 2$

Prvo ispitujemo prirodu ekstrema u $x_1 = -2$

$f''(x_1) = f''(-2) = -2 \cdot (-2) + 2 = 6 > 0$ Znači da funkcija ima minimum u tački $A_{min}(-2, f(-2))$. Kako je $f(-2) = -\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 1 = -\frac{25}{3}$ onda je minimum u $A_{min}(-2, -\frac{25}{3})$

Na isti način ispitujemo prirodu ekstrema u $x_2 = 4$

$f''(x_2) = f''(4) = -2 \cdot 4 + 2 = -6 < 0$ Znači da funkcija ima maksimum u tački $B_{max}(4, f(4))$. Kako je $f(4) = -\frac{1}{3} \cdot 4^3 + 4^2 + 8 \cdot 4 + 1 = \frac{83}{3}$ onda je minimum u $B_{max}(4, \frac{83}{3})$



<u>Intervali monotonosti</u>: Sa slike prvog izvoda funkcije možemo pročitati kada je prvi izvod pozitivan, a kada je negativan:

$f \nearrow \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 4)$

$f \searrow \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (4, \infty)$

<u>Prevojne tačke</u>:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1$, pa je prevojna tačka data sa $C(1, f(1))$

Pošto je $f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1^2 + 8 \cdot 1 + 1 = \frac{29}{3}$, onda je prevojna tačka $C(1, \frac{29}{3})$

4.

Uvodeći smenu $t = 3x^6 + 2$ dobijamo $dt = 18x^5 dx, \Leftrightarrow x^5 dx = \frac{1}{18} dt$ pa je

$$\int \frac{x^5}{3x^6 + 2} dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{18} dt = \frac{1}{18} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{18} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{18} \ln|t| + C = \frac{1}{18} \ln|3x^6 + 2| + C$$

5.

Ako sa K označimo nominalnu vrednost menice i sa e **komercijalni** eskont, tada iz zadatka sledi da je eskontovana vrednost menice $K - e = 78200$, a eskontna stopa $p = 24\%$. Budući da se obračun vrši po modelu (k,360), onda od dana eskontovanja 09.05.2008. do dana dospeća menice 06.09.2008. ima $d = 120$ dana i važi:

$$\begin{aligned} K : e = 36000 : pd \quad &\Leftrightarrow \quad K : (K - e) = 36000 : (36000 - pd) \\ &\Leftrightarrow \quad K \cdot (36000 - pd) = (K - e) \cdot 36000 \\ &\Leftrightarrow \quad K = \frac{(K - e) \cdot 36000}{(36000 - pd)} = \frac{78200 \cdot 36000}{(36000 - 24 \cdot 120)} = 85000 \end{aligned}$$

$$e = K - (K - e) = 85000 - 78200 = 6800$$

Šema eskonta:

Eskontovano		09.05.2008
Nominalna vrednost	85000 din.	12.09.2008
Eskont(120 dana/24%)	−6800 din.	
Eskontovana vrednost	78200 din.	09.05.2008