REŠENJA ZADATAKA SA PISMENOG ISPITA IZ MATEMATIKE NA VPŠSS U NOVOM SADU 05.06.2008.

1. grupa

1. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2-3i$, $z_2 = 1-i$ i $z_3 = 3+4i$. Odrediti $\dfrac{z_1 \cdot \overline{z}_2 + Re(z_1)}{z_3}$.

2. Pomoću inverzne matrice naći rešenja sistema jednačina

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 2\,x_1 & +2\,x_2 & -x_3 & = & 3 \\ 3\,x_1 & +5\,x_2 & -2\,x_3 & = & 6 \end{array}$$

3. Naći intervale monotonosti, ekstremne vrednosti i prevojne tačke funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1$$

4. Izračunati integral $\int x^5 \sin(2x^6+13)\,dx$

5. Banka je klijentu odobrila potrošački kredit u iznosu od 70 000 dinara, uz učešće od 25% i otpaltu ostatka duga u roku od 23 meseca po kamatnoj stopi od 9%. Odrediti ukupan dug i prosečnu mesečnu ratu.

REŠENJA:

1.

$$\begin{aligned}
\frac{z_1 \cdot \overline{z}_2 + Re(z_1)}{z_3} &= \frac{(2-3i)\cdot\overline{(1-i)} + Re(2-3i)}{3+4i} = \frac{(2-3i)\cdot(1+i)+2}{3+4i} \\
&= \frac{2+2i-3i-3i^2+2}{3+4i} = \frac{2+2i-3i-3\cdot(-1)+2}{3+4i} \\
&= \frac{2+2i-3i+3+2}{3+4i} = \frac{7-i}{3+4i} = \frac{7-i}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i} \\
&= \frac{(7-i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{21-28i-3i+4i^2}{3^2-(4i)^2} \\
&= \frac{21-28i-3i-4}{9+16} = \frac{17-31i}{25}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 2\,x_1 & +2\,x_2 & -x_3 & = & 3 \\ 3\,x_1 & +5\,x_2 & -2\,x_3 & = & 6 \end{array} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}}_{B} \Leftrightarrow A\cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1}\cdot B$$

Kako je $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\cdot A^*$, to znači da je $X = \dfrac{1}{\det(A)}\cdot A^*\cdot B$ Da bismo odredili X potrebno je da izračunamo $\det(A)$ i A^*

$$\begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad + \quad + \quad + \\ \quad\quad\quad\quad \searrow \quad \searrow \quad \searrow \end{array}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right. = 4$$

$$\begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \\ \quad\quad\quad\quad - \quad - \quad - \end{array}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} \\ A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* \cdot B = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.

Prvi izvod funkcije: $f'(x) = (\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1)' = x^2 + 4x + 3$

<u>Ekstremne vrednosti</u>: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3 \vee x_2 = -1$

Kandidati za ekstremne vrednosti su prema tome $x_1 = -3$ i $x_2 = -1$. Da bismo proverili prirodu ekstrema potreban nam je drugi izvod funkcije: $f''(x) = (f'(x))' = (x^2 + 4x + 3)' = 2x + 4$

Prvo ispitujemo prirodu ekstrema u $x_1 = -3$

$f''(x_1) = f''(-3) = 2\cdot(-3)+4 = -6+4 = -2 < 0$ Znači da funkcija ima maksimum u tački $A_{max}(-3, f(-3))$.

Kako je $f(-3) = \frac{1}{3} \cdot (-3)^3 + 2 \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) + 1 = 1$ onda je maksimum u $A_{max}(-3, 1)$

Na isti način ispitujemo prirodu ekstrema u $x_2 = -1$

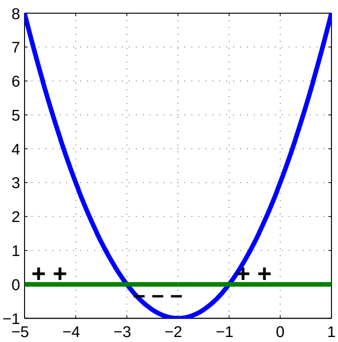
$f''(x_2) = f''(-1) = 2 \cdot (-1) + 4 = -2 + 4 = 2 > 0$ Znači da funkcija ima minimum u tački $B_{min}(-1, f(-1))$.

Kako je $f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1 = -\frac{1}{3}$ onda je minimum u $B_{min}(-1, -\frac{1}{3})$

<u>Intervali monotonosti</u>: Sa slike prvog izvoda funkcije možemo pročitati kada je prvi izvod pozitivan, a kada je negativan:

$f \nearrow \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$

$f \searrow \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, -1)$



<u>Prevojne tačke</u>:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$, pa je prevojna tačka data sa $C(-2, f(-2))$

Pošto je $f(-2) = \frac{1}{3}(\cdot(-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 1 = \frac{1}{3}$, onda je prevojna tačka $C(-2, \frac{1}{3})$

4.

Uvodeći smenu $t = 2x^6 + 13$ dobijamo $dt = 12x^5dx \Leftrightarrow x^5dx = \frac{1}{12}dt$ pa je

$$\int x^5 \sin(2x^6 + 13)dx = \int \sin t \frac{1}{12}dt = \frac{1}{12}\int \sin t\, dt = \frac{1}{12}(-\cos t) + C = \boxed{-\tfrac{1}{12}\cos(2x^6 + 13) + C}$$

5.

Neka je $G = 70\,000$ iznos odobrenog krediita. Sa p_u ćemo označiti procenat učešća pa je $p_u = 25\%$. Označimo učešće sa U, dobijamo ga sledećim postupkom:

$$G : U = 100 : p_u \Leftrightarrow 70000 : U = 100 : 25 \Leftrightarrow U \cdot 100 = 70000 \cdot 25 \Leftrightarrow U = \frac{70000 \cdot 25}{100} = 17500$$

Iznos koji treba otplatiti u roku 23 meseca ($m = 23$) uz kamatu $p = 9\%$ je tada

$$K = G - U = 70000 - 17500 = 52500$$

Za određivanje ukupnog duga D i prosečne mesečne rate b nam je potreban kamatni koeficijent:

$$k = \frac{(m+1)p}{2400} = \frac{(23+1)\cdot 9}{2400} = 0,09$$

Ukupni dug je : $D = K \cdot (1 + k) = 52500 \cdot (1 + 0,09) = 57225$ din

prosečna mesečna rata je: $b = \frac{D}{m} = \frac{57225}{23} = 2488,04348\ldots \approx 2488.04$ din

$\boxed{\text{2. grupa}}$

1. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 - 5i$ i $z_3 = 6 - 8i$. Odrediti $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{\overline{z}_3 + Im(z_2)}$.

2. Pomoću inverzne matrice naći rešenja sistema jednačina

$$\begin{array}{rrrcr} 2\,x_1 & -\,x_2 & -\,x_3 & = & 1 \\ -3\,x_1 & +2\,x_2 & -\,x_3 & = & -4 \\ -\,x_1 & -\,x_2 & +\,x_3 & = & 0 \end{array}$$

3. Naći intervale monotonosti, ekstremne vrednosti i prevojne tačke funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x + 1$$

4. Izračunati integral $\int x^7(4x^8 + 11)^{99}\, dx$

5. Banka je klijentu odobrila potrošački kredit u iznosu od 48 000 dinara, uz učešće od 20% i otpaltu ostatka duga u roku od 15 meseci po kamatnoj stopi od 18%. Odrediti ukupan dug i prosečnu mesečnu ratu.

REŠENJA:

1.

$$\begin{aligned} \frac{z_1 \cdot z_2}{\overline{z}_3 + Im(z_2)} &= \frac{(1+i)\cdot(3-5i)}{\overline{6-8i} + Im(3-5i)} = \frac{3-5i+3i-5i^2}{6+8i-5} \\ &= \frac{3-5i+3i-5\cdot(-1)}{1+8i} = \frac{3-5i+3i+5}{1+8i} \\ &= \frac{8-2i}{1+8i}\cdot\frac{1-8i}{1-8i} = \frac{(8-2i)(1-8i)}{(1+8i)(1-8i)} \\ &= \frac{8-64i-2i+16i^2}{1^2-(8i)^2} = \frac{8-64i-2i+16\cdot(-1)}{1+64} \\ &= \frac{8-66i-16}{65} = \frac{-8-66i}{65} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{array}{rrrcr} 2\,x_1 & -\,x_2 & -\,x_3 & = & 1 \\ -3\,x_1 & +2\,x_2 & -\,x_3 & = & 4 \\ -\,x_1 & -\,x_2 & +\,x_3 & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \Leftrightarrow A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Kako je $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^*$, to znači da je $X = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^* \cdot B$ Da bismo odredili X potrebno je da izračunamo $\det(A)$ i A^*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{matrix} = -7$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} \\ A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* \cdot B = \frac{1}{-7} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.

Prvi izvod funkcije: $f'(x) = (-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x + 1)' = -x^2 + 6x - 5$

Ekstremne vrednosti: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = 5$

Kandidati za ekstremne vrednosti su prema tome $x_1 = 1$ i $x_2 = 5$. Da bismo proverili prirodu ekstrema potreban nam je drugi izvod funkcije: $f''(x) = (f'(x))' = (-x^2 + 6x - 5)' = -2x + 6$

Prvo ispitujemo prirodu ekstrema u $x_1 = 1$

$f''(x_1) = f''(1) = -2 \cdot 1 + 6 = -2 + 6 = 4 > 0$ Znači da funkcija ima minimumu tački $A_{min}(1, f(1))$. Kako je $f(1) = -\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 1 = -\frac{4}{3}$ onda je minimum $A_{min}(1, -\frac{4}{3})$

Na isti način ispitujemo prirodu ekstrema u $x_2 = 5$

$f''(x_2) = f''(5) = -2 \cdot 5 + 6 = -10 + 6 = -4 < 0$ Znači da funkcija ima maksimum u tački $B_{max}(5, f(5))$. Kako je $f(5) = -\frac{1}{3} \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 + 1 = \frac{28}{3}$ onda je maksimum u $B_{max}(5, \frac{28}{3})$

Intervali monotonosti: Sa slike prvog izvoda funkcije možemo pročitati kada je prvi izvod pozitivan, a kada je negativan:

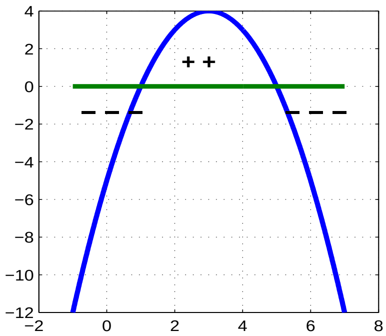
$f \nearrow \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, 5)$

$f \searrow \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (5, \infty)$

Prevojne tačke:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 6 = 0 \Leftrightarrow -2x = -6 \Leftrightarrow x = 3$, pa je prevojna tačka data sa $C(3, f(3))$

Pošto je $f(3) = -\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 1 = 4$, onda je prevojna tačka $C(3, 4)$



4.

Uvodeći smenu $t = 4x^8 + 11$ dobijamo $dt = 32x^7 dx \Leftrightarrow x^7 dx = \frac{1}{32} dt$ pa je

$$\int x^7 (4x^8 + 11)^{99}\, dx = \int t^{99} \frac{1}{32} dt = \frac{1}{32} \int t^{99} dt = \frac{1}{32} \frac{t^{100}}{100} + C = \frac{t^{100}}{3200} + C = \frac{(4x^8 + 11)^{100}}{3200} + C$$

5.

Neka je $G = 48\,000$ iznos odobrenog krediita. Sa p_u ćemo označiti procenat učešća pa je $p_u = 20\%$. Označimo učešće sa U, dobijamo ga sledećim postupkom:

$$G : U = 100 : p_u \Leftrightarrow 48000 : U = 100 : 20 \Leftrightarrow U \cdot 100 = 48000 \cdot 20 \Leftrightarrow U = \frac{48000 \cdot 20}{100} = 9600$$

Iznos koji treba otplatiti u roku 15 meseci ($m = 15$) uz kamatu $p = 18\%$ je tada

$$K = G - U = 48000 - 9600 = 38400$$

Za određivanje ukupnog duga D i prosečne mesečne rate b nam je potreban kamatni koeficijent:

$$k = \frac{(m+1)p}{2400} = \frac{(15+1) \cdot 18}{2400} = 0,12$$

Ukupni dug je : $D = K \cdot (1 + k) = 38400 \cdot (1 + 0,12) = 43008$ din

prosečna mesečna rata je: $b = \frac{D}{m} = \frac{43008}{15} = 2867,20$ din