BINOMNI MODEL ZA ODREĐIVANJE CENE OPCIJE

Milica Savin[*]

Sažetak: *Veoma korisna tehnika za određivanje cene opcije se sastoji u kreiranju binomnog stabla. Uz pretpostavku da ne postoji mogućnost arbitraže, cena opcije predstavlja diskontovanu vrednost njene očekivane vrednosti.*

Ključne reči: *opcija, arbitraža, binomno stablo, verovatnosna mera*

Abstract: *Very practical technique for option pricing consists of binomial tree creation. Under assumption that there is no arbitrage, option price is represented by discounted expected future value.*

Key words: *Option, arbitrage, binomial tree, probability measure*

Uvod

Opcija je ugovor koji daje pravo svom imaocu - strani koja je kupila opciju – ali ne i obavezu da kupi ili proda robu na određeni datum po određenoj ceni. Cena u ugovoru naziva se cena dospeća, roba se naziva roba u osnovi ugovora, a datum u ugovoru datum dospeća. Ako imalac opcije u momentu dospeća kupi (proda) robu u osnovi ugovora, kažemo da je opcija izvršena. Kol opcija (call option) daje pravo da se kupi roba, dok put opcija (put option) daje pravo da se proda roba. Za opcije na akcije, svaka opcija je obično na 100 komada akcija.

Za svaki tip opcije postoje dve strane u ugovoru:

- Duga pozicija u kol opciji – imalac (holder) ima pravo da kupi;
- Kratka pozicija u kol opciji – pisac (writer) mora da proda ako imalac želi da izvrši opciju;
- Duga pozicija u put opciji – imalac (holder) ima pravo da proda;
- Kratka pozicija u put opciji – pisac (writer) mora da kupi ako imalac želi da izvrši opciju.

Ako je T vreme dospeća, K ugovorena cena i S_T cena na tržištu robe u osnovi u momentu dospeća, prihodi od ovih opcija su:

Duga pozicija u kol opciji: $\max\{S_T - K, 0\}$;

Kratka pozicija u kol opciji: $-\max\{S_T - K, 0\} = \min\{K - S_T, 0\}$;

Duga pozicija u put opciji: $\max\{K - S_T, 0\}$;

Kratka pozicija u put opciji: $\max\{K - S_T, 0\} = \min\{S_T - K, 0\}$.

---

[*] Milica Savin, stručni saradnik, Visoka poslovna škola strukovnih studija, Novi Sad

Očigledno je da će profit imaoca opcije zavisiti od odnosa ugovorene i tržišne cene. Na primer, ako posmatramo evropsku kol opciju na akcije sa ugovorenom cenom 120\$ – to je pravo da se kupi 100 akcija, svaka za 120\$. Ako je cena opcije – premija od 6\$, ceo ugovor košta 600\$. Ako je u momentu dospeća cena na tržištu manja od 120\$, tada opcija neće biti izvršena. Investitor će izgubiti celu investiciju od 600\$. Ako je cena veća od 120\$, opcija će biti izvršena. U slučaju da je cena 140\$, opcija će biti izvršena i 100 akcija će biti kupljeno za 120\$ svaka. Ako se one odmah prodaju na tržištu investitor zarađuje 20\$ po akciji, ili 2000\$. Profit je 2000\$ - 600\$ = 1400\$. Da je cena akcije bila 125\$, opcija bi isto bila izvršena, jer u tom slučaju investitor je platio ugovor 600\$, kupio 100 akcija po ceni od 120\$ što je ukupno 600\$ + 12000\$ = 12600\$ i prodao tih 100 akcija po ceni od 125\$ za 12500\$. Pa dobijamo razliku 12500\$ - 12600\$, što znači da investitor gubi 100\$ što je bolje nego da izgubi kompletnu investiciju od 600\$.

Opcije imaju dugu istoriju jer obezbeđuju odličan mehanizam za kontrolu rizika. Sledeća priča je omiljena među profesorima koji pišu o opcijama.[1]

Da bi dokazali da od filozofije nema praktične koristi, Talesu iz Mileta prebacivali su zbog njegovog siromaštva. On je, prema predanju, mogao posmatrajući zvezde zimi da predvidi kakva će biti žetva maslina sledećeg leta. Tako je predvidevši dobru žetvu, sa malo novca dao depozit za korišćenje svih presa za masline u Chios-u i Miletus-u i iznajmio ih po niskoj ceni jer nije imao konkurente. Kada je došla žetva, pojavila se velika potreba za presama pa je on iznajmljujući ih po visokoj ceni zaradio mnogo novca i dokazao da i filozofi mogu da budu bogati ako žele.

Opcije se mogu prodati ili kupiti u bilo kom momentu pre vremena dospeća. Osnovno pitanje je kako izračunati cenu opcije. Mi ćemo koristeći model binomnog stabla izvesti formulu za izračunavanje cene opcije, uz pretpostavku da ne postoji mogućnost arbitraže. Pre svega ćemo navesti matematičke pojmove sa kojim ćemo se sresti u daljem radu.

Neka je (Ω, F, P) prostor verovatnoće i T skup indeksa. Familija $F = \{F_t, t \in T\}$ pod σ-algebri od F se naziva filtracija, ako je $F_s \subset F_t$ za svako $s < t$.

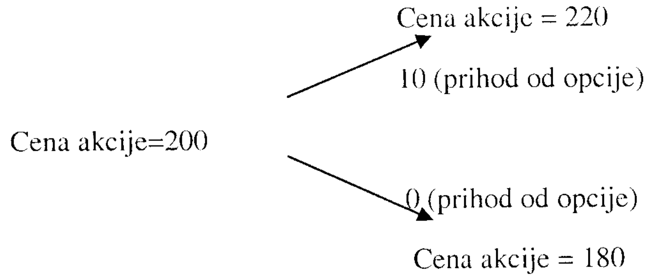
Slučajni proces $\{N_t, t \in T\}$ na prostoru verovatnoće (Ω, F, P) se naziva adaptiran u odnosu na filtraciju F ako je za svako $\{F_t, t \in T\}$ slučajna promenljiva N_t merljiva u odnosu na F_t.

Neka je (Ω, F, P) prostor verovatnoće sa filtracijom F. Slučajan process N_t na istom prostoru verovatnoće je marginalan u odnosu na filtraciju F ako je N adaptiran u odnosu na F, ako $E_P(|N_t|) < \infty$, za svako $t \in T$, i ako $E_P(N_t \mid \mathrm{F}_s) = N_s$ za svako $t \geq s$.

Binomialno stablo za jedan period

Neka je trenutna cena akcije S = 200, i pretpostavimo da za pola godine ona može biti 220 ili 180. Akcija na koju se odnosi opcija ne donosi dividende. Ugovorena cena isporuke na kraju perioda $[0,T]$ je K =210. Mi hoćemo da odredimo cenu opcije na početku perioda. Iz $C = \max(S_t - K, 0)$ znamo da prihod od opcije na dan dospeća može biti 10 ako cena akcije poraste, ili 0 ako cena opadne.

[1] Luenberger D.G.,(1998) *Investment science*, New York, Oxford, Oxford University Press



Slika 1.

Osnovna pretpostavka modela je da ne postoji mogućnost arbitraže. Posmatramo portfolio koji se sastoji od akcija i od jedne kol opcije. Hoćemo da odredimo broj akcija Δ i cenu kol opcije tako da dati portfolio bude nerizičan. Ako se cena akcije promeni sa 200 na 220, vrednost akcija iznosiće $220\cdot\Delta$ a cena opcije 10, pa će ukupna vrednost portfolia biti $220\cdot\Delta - 10$. Ako se pak cena akcije promeni sa 200 na 180, vrednost akcija će biti $180\cdot\Delta$, cena opcije 0, a ukupna vrednost portfolia $180\cdot\Delta$. Portfolio je nerizičan za onu vrednost Δ za koju u oba slučaja dobijamo istu krajnju vrednost, tj. :

$$220\cdot\Delta - 10=180\cdot\Delta$$

odnosno, za $\Delta=0.25$.

Ako se cena akcije poveća na 220, vrednost portfolia iznosi

$$220\cdot 0.25 - 10 = 45$$

a ako se smanji na 180, vrednost portfolia ima istu vrednost, tj.

$$180\cdot 0.25 = 45$$

Pošto ne postoji mogućnost arbitraže, prihod od portfolia mora da se slaže sa bezrizičnom kamatnom stopom. Ako uzmemo da je u ovom slučaju bezrizična kamatna stopa 12% godišnje, dobijamo da je diskontovana vrednost portfolia vrednost portfolia u početnom trenutku, što je u stvari sadašnja vrednost od 45, tj.

$$45^{-0.12\cdot 0.5} = 42.379$$

Znamo da je cena akcije u početnom trenutku 200. Ako cenu opcije označimo sa C, vrednost portfolia u početnom trenutku mora da bude jednaka sa troškovima formiranja portfolia:

$$42.379=200\cdot\Delta-C=200\cdot 0.25-C$$

dakle $C=7.621$.

Sada ćemo postaviti uopštenje prethodnog primera. Neka je S poznata cena akcije na početku perioda, na kraju perioda cena akcije može biti $S\cdot u$ ili $S\cdot d$, pri čemu je $u>1$ i $0<d<1$. Ako se cena akcije poveća na $S\cdot u$ odgovarajući prihod opcije je C_u, a ako se smanji na $S\cdot d$ prihod je C_d. Portfolio se sastoji od Δ količine akcija i od jedne kol opcije. Vrednosti portfolija na dan dospeća su $S\cdot u\cdot\Delta-C_u$ ili $S\cdot d\cdot\Delta-C_d$ pa je portfolio nerizičan ako važi

$$S\cdot u\cdot\Delta-C_u=S\cdot d\cdot\Delta-C_d$$

pa je

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S \cdot u - S \cdot d}.$$

Kako sadašnja vrednost portfolia mora da odgovara troškovima njegovog formiranja, mora da bude zadovoljena jednakost

$$(S \cdot u \cdot \Delta - C_u)e^{-rT} = S \cdot \Delta - C$$

pa kada uvrstimo Δ dobijamo da je

$$(S \cdot u\left(\frac{C_u - C_d}{S \cdot u - S \cdot d}\right) - C_u)e^{-rT} = S\left(\frac{C_u - C_d}{S \cdot u - S \cdot d}\right) - C$$

tj.

$$C = C_u e^{-rT}\left(\frac{e^{rT} - d}{u - d}\right) + C_d e^{-rT}\left(\frac{u - e^{rT}}{u - d}\right).$$

Ako uvedemo smenu

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

dobijamo na kraju da je

$$C = e^{-rT}\left[pC_u + (1-p)C_d\right].$$

Kada u poslednje dve formule uvrstimo vrednosti iz našeg primera, gde su $u = 1.1, d = 0.9, r = 0.12, C_u = 10$ i $C_d = 0$ dobijamo:

$$p = \frac{e^{0.12 \cdot 0.5} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.80918,$$

i konačno dobijamo da je cena opcije:

$$C = e^{-0.06}\left(0.80918 \cdot 10 - 0.19082 \cdot 0\right) = 7.621$$

Ako $P = (p, 1-p)$ posmatramo kao verovatnosnu meru, tada je $p \cdot C_u + (1-p)C_d$ očekivana vrednost opcije na dan dospeća u odnosu na P. Sada je očigledno da je cena opcije jednaka diskontovanoj vrednosti očekivane vrednosti opcije u odnosu na meru P, pri čemu je p verovatnoća da se cena akcije povećala, a $1-p$ verovatnoća da se cena akcije smanjila. Odavde sledi da je

$$E_P\left(S_T / S\right) = pSu + (1-p)Sd$$

i nakon uvrštavanja p dobijamo jednakost:

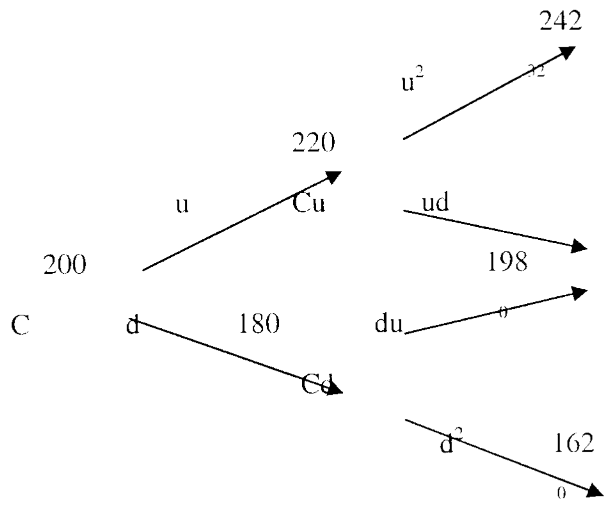
$$E_P\left(S_T / S\right) = Se^{rT},$$

što zaista dokazuje nemogućnost arbitraže. Primetimo još da je diskontovana vrednost očekivane vrednosti cene akcije martingalna u odnosu na meru P jer je

$$e^{-rT}E_P\left(S_T / S\right) = e^{-rT}E_P\left(S_T / F_0\right) = S.$$

Binomno stablo za dva perioda

Ako u našem primeru rok dospeća podelimo na dva jednaka dela i zadržimo pretpostavku da se u svakom čvoru grafikona cena akcije menja na dva načina kao kod modela sa jednim periodom, znaćemo da odredimo pre svega prihod od opcije u krajnjim tačkama. Poznate informacije ilustrovaćemo na sledećem grafiku.



Slika 2.

Prvo posmatramo gornje dve grane drugog perioda i odredimo p i C_u

$$p = \frac{e^{0.12\cdot 0.25} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.65227$$

$$C_u = e^{-0.12\cdot 0.25}(0.65227\cdot 32 + 0.34773\cdot 0) = 20.256$$

Na sličan način dobijamo da je $C_d = 0$. Pošto se cena akcije menja na isti način u oba perioda, a periodi su jednake dužine i r smo uzeli da je konstanta, vrednosti p su jednake u oba perioda, i dobijamo da je

$$C = e^{-0.12\cdot 0.25}(0.65227\cdot 20.256 + 0.34773\cdot 0) = 12.822$$

Formule za izračunavanje su sledeće:

$$C_u = e^{-r\frac{T}{2}}\left[pC_{uu} + (1-p)C_{ud}\right]$$

$$C_d = e^{-r\frac{T}{2}}\left[pC_{ud} + (1-p)C_{dd}\right]$$

$$C = e^{-r\frac{T}{2}}\left[pC_u + (1-p)C_d\right]$$

kada prve dve jednakosti uvrstimo u treću, dobijamo:

$$C = e^{-r\frac{T}{2}}\left[p^2 C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2 C_{dd}\right]$$

Ova formula pokazuje da je u nerizičnim okolnostima cena opcije jednaka sa diskontovanom sadašnjom vrednošću očekivane vrednosti opcije.

Binomno stablo za *n* perioda

Ako dati interval [0,T] podelimo na n jednakih delova dobijamo uopštenje početnog problema. Na kraju n-tog intervala, postoji $n + 1$ mogućnost za prihod od opcije. Ako sa k označimo međuperiode u kojima je cena akcije rasla do momenta T, dobijamo da su moguće krajnje cene za akciju

$$S \cdot u^k \cdot d^{n-k},\ k = 0,1,\ldots,n$$

pa su prihodi od opcija u krajnjim tačkama

$$\max\left(S \cdot u^k \cdot d^{n-k} - K, 0\right),\ k = 0,1,\ldots,n$$

a odgovarajuće verovatnoće

$$\binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0,1,\ldots,n$$

pa je početna cena opcije

$$C = \left(1 + \frac{rT}{n}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k} \cdot \max(S \cdot u^k d^{n-k} - K, 0)$$

Zaključak

Konstrukcija binomnog drveta garantuje da možemo jedinstveno odrediti prihod od opcije u bilo kom čvoru drveta. Videli smo da je opcija povezana sa podlogom na koju se odnosi, jer u suprotnom bi postojala mogućnost ostvarivanja nerizičnog profita. Cenu opcije smo odredili kao diskontovanu vrednost (u trenutku $t = 0$) očekivane vrednosti opcije (u trenutku $t = T$) u odnosu na meru P. Da ne bi postojala mogućnost arbitraže, proces diskontovanja cene akcije mora biti martingalan proces u odnosu na verovatnosnu meru P.

Literatura

[1] Hull J.C., *Options, Futures and other Derivatives*, fourth ed. , Prentince Hall NJ.

[2] Luenberger D.G.,(1998) *Investment science*, New York, Oxford, Oxford University Press,

[3] Bachelier L., *Thorie de la Speculation*, Ann. Sci. cole Norm. Sup 17 (1900) 21- 86

[4] Kallenberg O.,(2002) *Foundations of modern Probability*, Springer

[5] Arnold L., (1974) *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, John Wiley & Sons