CENA AKCIJA I GEOMETRIJSKO BRAUNOVO KRETANJE

Sanja Lončar*

Sažetak *Rad je posvećen proučavanju prirode kretanja akcija. U tu svrhu koristi se granični slučaj CRR modela, kako bi se izveo neprekidni model kretanja cena akcije, koji je zapravo model geometrijskog Braunovog kretanja. Ilustracija primene modela zasnovana je na istorijskim podacima o dnevnim promenama cena akcija kompanije Google Inc. u periodu 1.1.2007-31.12.2007. Možemo zakjučiti da iako je neprekidni model precizan, diskretni model je zahvaljujući svojoj jednostavnosti njegova elegantna numerička alternativa.*

Ključne reči: *cene akcije, CRR model, geometrijsko Braunovo kretanje, log-normalna raspodela verovatnoće*

Abstract:. *In this paper the nature of stock price motions was examined. For this purpuse, the limiting case of CRR model to derive continuous model of stock price movements was used, which is actually the model of geometric Brownian motion. Illustration of the model application is based on historical data of the daily changes in stock prices for Google Inc. Company, during the time period 1.1.2007-31.12.2007. We can conclude that though the continuous model is precise, the discrete model is its elegant numerical alternative due to its simplicity.*

Key words: *stock prices, CRR model, geometric Brownian motion, lognormal distribution*

Uvod

Često se tvrdi da kretanje cena akcija, zbog hipoteze o efikasnom tržištu, mora biti slučajno[1]. Prema tome, cenu akcije bismo mogli poistovetiti sa česticom polena, potopljenom u fluid, čuvenog botaničara Brauna. Dakle, cena akcija je neprekidno „bombardovana“ manjim česticama u obliku transakcija, koje utiču na njeno dalje kretanje. Nedostatak ovog poređenja jeste da slučajno kretanje može biti i negativno, što nije slučaj s cenom akcija[2]. Stoga je ideja da se umesto cene akcije, s kretanjem čestice poistovetimo njenu stopu prinosa.

U ovom radu ćemo posmatrati granični slučaj CRR (Cox-Ross-Rubinstein) modela, kako bi konstruisali neprekidni model i samim tim pokazali da cene akcija imaju log-normalnu raspodelu verovatnoće. Ta osobina se može iskoristiti za dobijanje informacija o raspodeli verovatnoće stope prinosa pri neprekidnom kapitalisanju, kao i za određivanje volatilnosti cene akcije.

* Sanja Lončar, saradnik u nastavi, Visoka poslovna škola strukovnih studija, Novi Sad

[1] P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives – A Student Introduction*, University Press, Cambridge, 1995, 19.

[2] S. Roman, Introduction ot the Mathematics of Finance, Springer, 2004, 241.

Ako definišemo slučajnu promenljivu Y_n kao sumu slučajnih promenljivih X_i , i=1, 2 , ..., n dobijamo :

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & k & \cdots & n \\ (1-q)^n & nq(1-q)^{n-1} & \cdots & \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} & \cdots & q^n \end{pmatrix} = \mathcal{B}(n,q)$$

Dakle, Y_n ima binomnu raspodelu, odakle i potiče drugi naziv za CRR model. Sada možemo zaključiti da je cena akcije na kraju n-tog perioda definisana sa

$$S(n) = u^{Y_n} d^{n-Y_n} S(0)$$

Primećujemo da cena ne zavisi od putanje kojom smo došli do odgovarajućeg čvora, već samo od broja Y_n (koliko puta je cena rasla). Na primer do čvora sa cenom $\boldsymbol{u^3 d^2 S}$ možemo doći i putanjom „***uuuddS***“, ali ćemo istu vrednost dobiti putanjom „***ududuS***“.

Granični slučaj CRR modela

Neka je t životni vek modela, n broj perioda, a $\Delta t = t/n$ dužina jednog perioda. Polazeći od zakonitosti o kretanju akcija koju smo naveli u delu 2 , kao i ranije uvedenih oznaka dobijamo:

$$S(n) = u^{Y_n} d^{n-Y_n} S(0) \Leftrightarrow \frac{S(n)}{S(0)} = d^n \left(\frac{u}{d}\right)^{Y_n} \Leftrightarrow \ln\frac{S(n)}{S(0)} = n\ln d + \ln\left(\frac{u}{d}\right) Y_n$$

Kako je $E(Y_n) = nq$, a $D(Y_n) = nq(1-q)$ važi

$$E\left(\ln\frac{S(n)}{S(0)}\right) = n\ln d + \ln\left(\frac{u}{d}\right) E(Y_n) = n\left(\ln d + \ln\left(\frac{u}{d}\right) q\right)$$

$$D\left(\ln\frac{S(n)}{S(0)}\right) = \left(\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right)^2 D(Y_n) = nq(1-q)\left(\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right)^2$$

Jasno se vidi da ako n postane veliko, nećemo dobiti realistične rezultate. Kako je t fiksiran vremenski interval, da bismo dobili realistične rezultate moramo tome prilagoditi veličine u, d i q. Naš cilj je da su matematičko očekivanje i varijansa stope prinosa pri neprekidnom kapitalisanju istovetne sa stvarnom cenom akcije, kada $n \to \infty$. Ako sa μt i $\sigma^2 t$ označimo empirijske rezultate za matematičko očekivanje i varijansu redom, tada uzimajući sledeće vrednosti za u i d:

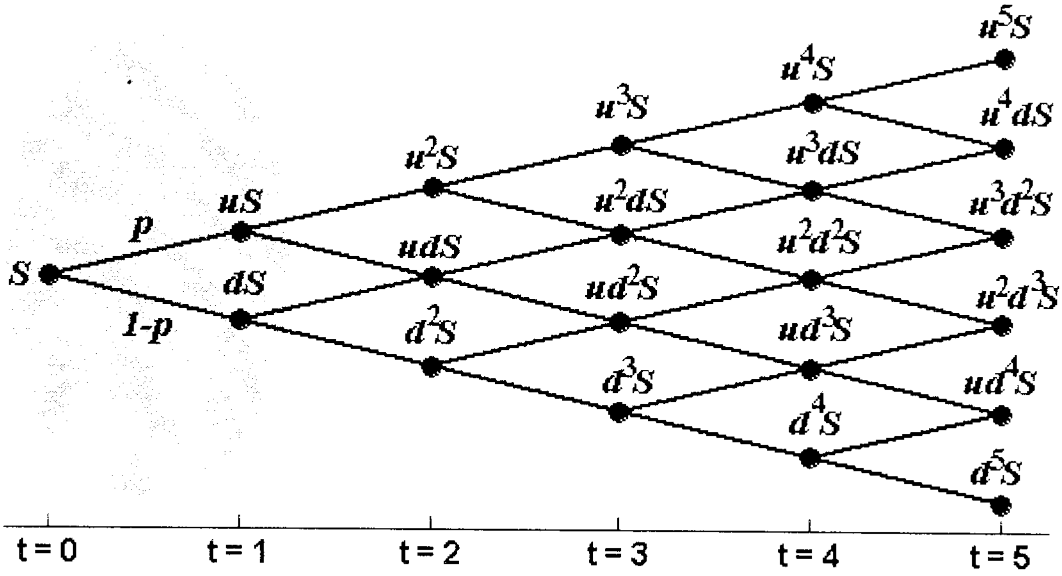
$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

dokazujemo da cene akcija prate geometrijsko Braunovo kretanje. Pretpostavićemo da je stopa r definisana za period t, onda je njena vrednost u svakom od vremenskih intervala Δt, Δr, pa rizik neutralna verovatnoća ima oblik

$$q = \frac{1 + \Delta r - d}{u - d}$$

Za dovoljno malo Δt , u i d se mogu razviti u red:



Slika 1. Drvo stanja CRR modela za pet perioda

CRR model za *n* vremenskih perioda

Pretpostavićemo da je na početku perioda tj. u trenutku t = 0, cena akcije S, a da će na kraju perioda tj. u trenutku t = 1 cena akcije biti ili uS sa verovatnoćom p ili dS sa verovatnoćom $1\text{-}p$, kao što je prikazano na slici 1. pri čemu pretpostavljamo da je $0 < d < u$. Ako sa R označimo prinos nerizične investicije tj. $R = 1 + r$, gde je r kamatna stopa bez rizika i imamo odsustvo arbitraže, lako se dokazuje da tada važi $d < R < u$.

Fiksirajmo prvo jedan čvor u modelu, njegovu cenu ćemo označiti $S(i)$, gde je i označava „nivo" čvora. Uvodimo slučajne promenljive X_i za i=1, 2 , ..., n čija je vrednost 1 ako cena akcije poraste, a 0 ako cena akcije padne u odnosu na cenu iz čvora prethodnog nivoa:

$$X_i = \begin{cases} 1, & S(i) = uS(i-1) \\ 0, & S(i) = dS(i-1) \end{cases}$$

Dalje, neka je $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in \{0, 1\}$ jedan mogući ishod, koji nam u stvari opisuje putanju cena akcija po CRR modelu. Tada nam teorema o arbitraži daje važan rezultat da postoje verovatnoće koje sve ishode $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in \{0, 1\}$ čine jednako verovatnim, tj. dobijamo da je verovatnoća da će cena akcije rasti, koja isključuje mogućnost arbitraže, definisana sa:

$$q = \frac{R-d}{u-d}$$

Verovatnoća q je u literaturi poznata pod nazivom **rizik neutralna verovatnoća**. U nastavku ćemo koristiti rizik neutralnu verovatnoću. Mada na ovom mestu moramo naglasiti da ona ne mora biti ista kao verovatnoća u realnom svetu[3]. Njena upotreba je zgodna, zato što u svetu neutralnom u odnosu na rizik, investitori ne zahtevaju kompenzaciju za rizik i očekivani prinos za sve aktive je nerizična stopa. Jasno je da slučajne promenljive X_i za i=1, 2 , ..., n imaju binomnu raspodelu

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-q & q \end{pmatrix} = \mathcal{B}(1, q)$$

[3] J. Hull, *Options, Futures and Other Derivatives*, Sixth Edition, Pearson Education, Inc., 2006, 246.

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \approx 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \approx 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$$

Odavde rizik neutralna verovatnoća je

$$q = \frac{\Delta r + \sigma\sqrt{\Delta t} - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\Delta r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right)$$

Stavljajući $\mu = \Delta r - \frac{1}{2}\sigma^2$ rizik neutralna verovatnoća dobija svoj konačni oblik

$$q = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right)$$

Kako je $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $\frac{u}{d} = e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}}$ i $n = \frac{t}{\Delta t}$ sledi da je

$$\ln\frac{S(n)}{S(0)} = n\ln d + \ln\left(\frac{u}{d}\right)Y_n = -\frac{t\sigma}{\sqrt{\Delta t}} + 2\sigma\sqrt{\Delta t}\,Y_n$$

Prelaz sa diskretnog modela na neprekidni ostvarujemo puštajući da dužina intervala Δt teži nuli tj. $\Delta t \to 0$, tada za broj intervala n, važi: $n \to \infty$.

Pošto su sve slučajne promenljive X_i, nezavisne i sa identičnom raspodelom, pri čemu je $E(X_i) = q$ i $D(X_i) = q(1-q)$, onda na osnovu centralne granične teoreme imamo da za $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ važi

$$P\left[\frac{Y_n - nq}{\sqrt{q(1-q)n}} < x\right] \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Kako je $\ln\frac{S(n)}{S(0)} = -\frac{t\sigma}{\sqrt{\Delta t}} + 2\sigma\sqrt{\Delta t}\sum_{i=1}^{n} X_i$, onda za dovoljno veliko n $\ln\frac{S(n)}{S(0)}$ ima normalnu raspodelu, sa sledećim matematičkim očekivanjem i varijansom:

$$E\left(\ln\frac{S(n)}{S(0)}\right) = -\frac{t\sigma}{\sqrt{\Delta t}} + 2\sigma\sqrt{\Delta t}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = t\mu$$

$$D\left(\ln\frac{S(n)}{S(0)}\right) = 4\sigma^2\Delta t D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sigma^2 t\left(1 - \frac{\mu^2}{\sigma^2}\Delta t\right) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \sigma^2 t$$

Dakle, važi

$$\ln\frac{S(n)}{S(0)} : \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$$

te samim tim zaključujemo da cena akcije sledi **geometrijsko Braunovo kretanje** sa **drift** parametrom μ i parametrom **volatilnosti** σ.

Znači da je u trenutku t, tj na kraju n-tog vremenskog intervala cena akcije data sa

$$S(n) = S(0)e^{-\frac{t\sigma}{\sqrt{\Delta t}}+2\sigma\sqrt{\Delta t}\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

Koristeći tvrđenje da ako slučajna promenljiva Z ima log-normalnu raspodelu i $X = \ln Z : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ onda je

$$E(Z) = E(e^X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \quad \text{i} \quad D(Z) = D(e^X) = \left(e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\right)^2 \left(e^{\sigma^2}-1\right)$$

dobijamo da

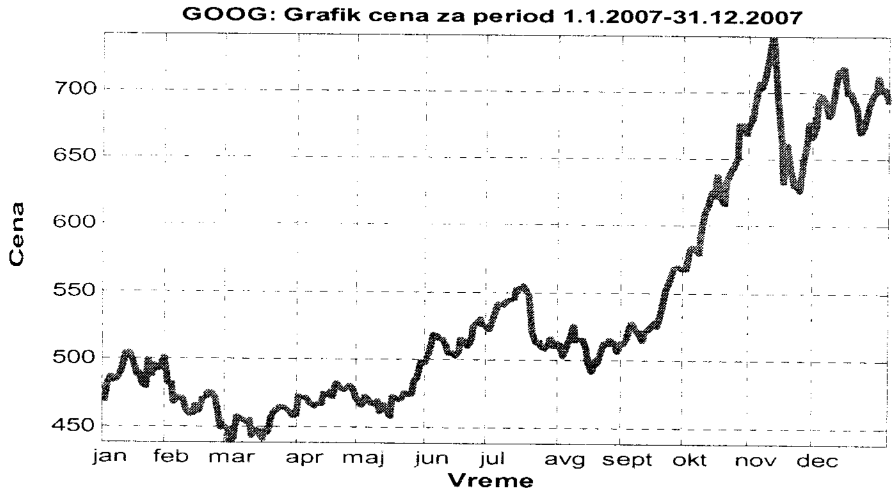
$$E(S(t)) = S(0)e^{\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)t} \quad \text{i} \quad D(S(t)) = \left(S(0)e^{\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)t}\right)^2 \left(e^{\sigma^2 t}-1\right)$$

Dobijeni teorijski rezultati se mogu primeniti na dobijanje rezultata o volatilnosti akcija proizvoljne kompanije, kao i za modelovanje stope prinosa. Kako je $S(n) = S(0)e^{sn}$, pri čemu je s stopa prinosa pri neprekidnom kapitalisanju za jedan period, tada se iz gornjeg rezultata dobija

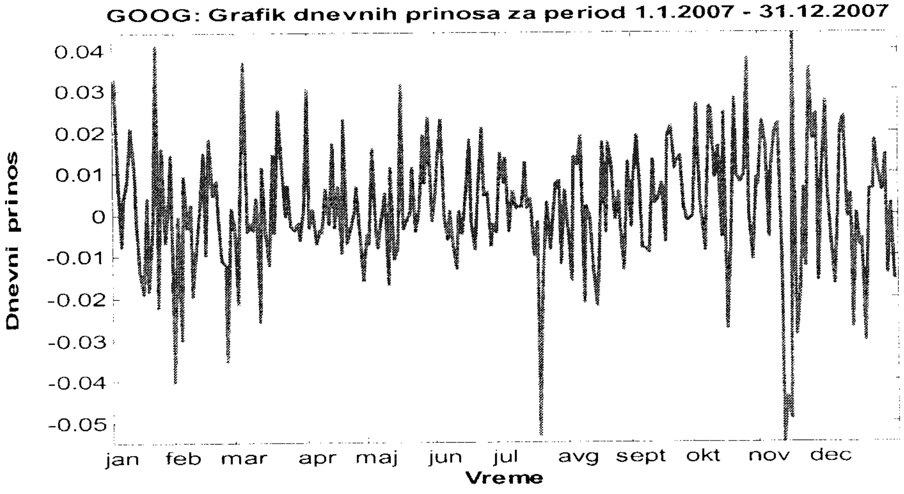
$$s = \frac{1}{n}\ln\frac{S(n)}{S(0)}$$

Jasno je da stopa prinosa ima normalnu raspodelu verovatnoće, što jasno ilustruje slika 3.

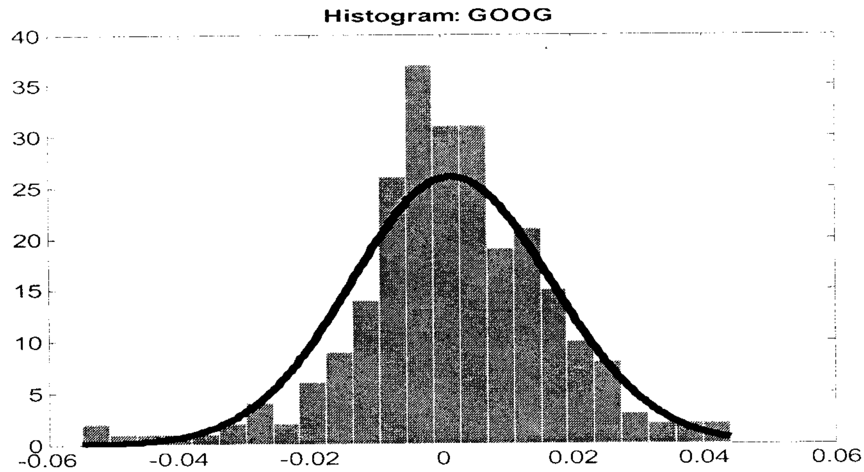
Koristeći podatke o dnevnim cenama akcija kompanije Google Inc. u periodu 1.1.2007-31.1.2007. godine, preuzete sa http://finance.yahoo.com/q/hp?s=GOOG uz obradu podataka softverskim paketom Matlab, dobijamo sledeće rezultate: matematičko očekivanje stope prinosa je 0,0016, standardna devijacija je 0,0153, drift cene akcije 0,3944, a volatilnost 0,2435.



Slika 2. Grafik dnevnih promena cena akcija.



Slika 3. Grafik dnevnih promena prinosa akcija.



Slika 4. Raspodela verovatnoće stope prinosa sa svojom idealizovanom raspodelom

Zaključak

Praćenje kretanja cena akcija je bitno ne samo za direktno trgovanje ovim hartijama od vrednosti, nego je i izrazito važno za određivanje cena finansijskih derivata čije su one podloga. Iz konkretnih podataka za kompaniju Google Inc. vidimo da je CRR model zgodan za praktična izračunavanja i obradu velike količine podataka, a nedostaci su da se akcijama trguje skoro neprekidno, a istovremeno u periodu od npr. jednog dana cena akcije može imati i po stotinu vrednosti. Iz navedenih razloga možemo zaključiti da su neprekidni modeli daleko precizniji, ali diskretni modeli, zahvaljujući jednostavnosti izračunavanja, opravdano predstavljaju njihovu alternativu.

Literatura

[1] Cox J., Ross S., Rubinstein M., (1979) *Option Pricing: A Simplified Approach*, „Journal of Financial Economics"

[2] Hull J.,(2006) *Options, Futures and Other Derivatives*, Sixth Edition, Pearson Education, Inc.

[3] Luenberger D., (1998) *Investment Science*, Oxford University press

[4] Roman S., (2004) *Introduction ot the Mathematics of Finance,* Springer

[5] Yuh-Dauh Lyuu, (2002) *Finansial Engineering and Computation* , Cambridge University press

[6] Wilmott P., Howison S., Dewynne J.,(1995) *The Mathematics of Financial Derivatives – A Student Introduction*, Cambridge University Press