HIBRIDNE MEŠAVINE

Dragan Jočić*

Sažetak: *U ovom radu je okarakterisana familija operatora sadržanih u uopštenim mešavinama, na osnovu rezultata koji je okarakterisao sve parove neprekidnih t-normi i t-konormi koje zadovoljavaju uslovnu distributivnost. Osnovni rezultat je da se osim verovatnosne i mogućosne mešavine može pojaviti samo neka vrsta hibridizacije tako da je ispod nekog nivoa a,* $0 \leq a \leq 1$*, ona mogućnosna, a iznad tog nivoa verovatnosna.*

Ključne reči: *t-norma, t-konorma, uslovna distributivnost, dekompozabilna mera, funkcija korisnosti*

Abstract: This paper characterizes the families of operations involved in generalized mixtures on the basis of the previous results on the characterization of pairs of continuous t-norm and t-conorm, which satisfy conditional distributivity. The basic result is that apart from possiblistic and probablistic mixtures there can be only a form of hybridization, and it is possiblistic under a certain threshold, or it is probablistic if it is above it..

Keywords: *t-norm, t-conorm, conditional distributivity, decomposable measure, utility function*

Uvod

Ovaj rad baziran je na [3] u kome u je rešen problem prirodnog uopštenja verovatnosne mešavine kao hibridne ekstenzije von Neumann Morgenstern-ove teorije korisnosti [7]. Pristup se bazira na matematičkom rezultatu [6] o karakterizaciji parova neprekidnih t-normi i t-konormi koji zadovoljavaju oslabljeni uslov distributivnosti. Ovaj rezultat ima jak uticaj na pojam mešavine. Izvan verovatnosne i mogućnosne mešavine jedino je oblik hibridizacije moguć tako da je mešavina mogućnosna ispod određenog nivoa a verovatnosna iznad tog nivoa. Tesno povezan problem verovatnoće je i osnovni pojam nezavisnosti događaja. U [3] je pokazano da isti uslov oslabljene distributivnosti mora biti zadovoljen između t-konorme koja karakteriše pseudo-aditivnu meru i t-norme koja karakteriše nezavisnost. Mešavine i uvedena uopštena nezavisnost su međusobno tesno povezane u teoriji korisnosti [1]. Ova veza omogućava konstrukciju algoritma za izračunavanje vrednosti mera u složenoj lutriji, a odatle i algoritam za izračunavanje hibridne mešavine.

Matematička osnova

U ovoj sekciji daju se osnovne osobine t-normi, kao i rezultat koji se odnosi na uslovnu distributivnost t-norme prema t-konormi. Za detaljnije proučavanje ovih važnih binarnih operacija koje imaju značajnu primenu u *fuzzy* skupovima, *fuzzy* logici, u teoriji uopštenih mera, u nelinearnim diferencijalnim i diferencnim jednačinama pogledati [6].

* mr Dragan Jočić, saradnik u nastavi, Visoka poslovna škola strukovnih studija, Novi Sad

Definicija 1 Trougaona norma (t-norna kraće) je binarni operator T na jediničnom intervalu [0,1], tj. funkcija $T:[0,1]^2 \to [0,1]$ tako da za sve $x,y,z \in [0,1]$ su zadovoljene sledeće četiri aksiome:

(T1) $T(x,y) = T(y,x)$ (komutativnost)

(T2) $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$ (asocijativnost)

(T3) $T(x,y) \leq T(x,z)$ ako je $y \leq z$ (monotonost)

(T4) $T(x,1) = x$ (rubni uslov).

Postoji neprebrojivo mnogo t-normi a najvažnije su sledeće četiri bazične t-norme.

Primer 1

$T_M(x,y) = \min(x,y)$, (minimum)

$T_P(x,y) = xy$, (proizvod)

$T_L(x,y) = \max(x+y-1,0)$, (Lukasiewich t-norma)

$$T_D(x,y) = \begin{cases} 0 & ako\ (x,y) \in [0,1)^2, \\ \min(x,y) & inače. \end{cases}$$ (drastični proizvod)

Definicija 2 Trougaona konorma (t-konorma kraće) je binarni operator S na jediničnom intervalu [0,1] tj. funkcija $S:[0,1]^2 \to [0,1]$ tako da za sve $x,y,z \in [0,1]$ zadovoljava uslove (T1)-(T3) i

(S4) $S(x,0) = x$ (rubni uslov).

Odmah se vidi da je jedina razlika između t-normi i t-konormi u graničnom uslovu.

Primer 2

S_M, S_L, S_P, S_D su četiri bazične t-konorme date sa:

$S_M(x,y) = \max(x,y)$, (maksimum)

$S_P(x,y) = x+y-xy$, (verovatnosna suma)

$S_L(x,y) = \min(x+y,1)$, (Lukasiewich t-konorma)

$$S_D(x,y) = \begin{cases} 1 & ako\ (x,y) \in (0,1]^2, \\ \max(x,y) & inače. \end{cases}$$ (drastična suma)

Propozicija 1. Funkcija $S:[0,1]^2 \to [0,1]$ je t-konorma akko postoji t-norma T tako da za sve $(x,y) \in [0,1]^2$ važi $S(x,y) = 1-T(1-x,1-y)$.

Ova propozicija je važna jer izražava dualnost između t-normi i t-konormi i to nam dozvoljava da mnoge osobine t-normi prenesemo na odgovarajuće osobine t-konormi. Prema tome u daljem radu sve definicije i teoreme daju se samo za t-norme.

Sada se daje teoremu koja pokazuje konstrukciju nove t-norme pomoću familije datih t-normi.

Teorema 1 Neka je $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ familija t-normi i $((a_\alpha,e_\alpha))_{\alpha\in A}$ familija nepraznih disjunktnih podintervala od [0,1]. Tada je sledeća funkcija $T:[0,1]^2\to[0,1]$ t-norma:

$$T(x,y)=\begin{cases} a_\alpha+(e_\alpha-a_\alpha)\cdot T_\alpha\left(\dfrac{x-a_\alpha}{e_\alpha-a_\alpha},\dfrac{y-a_\alpha}{a_\alpha-e_\alpha}\right) & ako\ (x,y)\in[a_\alpha,e_\alpha]^2, \\ \min(x,y) & inače. \end{cases}$$

t-norma T iz ove teoreme se zove ordinalna suma sumanda $<a_\alpha,e_\alpha,T_\alpha>$ i piše $T=(<a_\alpha,e_\alpha,T_\alpha>)_{\alpha\in A}$.

Među t-normama važnu klasu čine Arhimedove t-norme za koje važi sledeća reprezentacija:

Teorema 2 Za funkciju $T:[0,1]^2\to[0,1]$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) T je neprekidna Arhimedova t-norma.

(ii) Postoji neprekidna, striktno monotono opadajuća funkcija $t:[0,1]\to[0,\infty]$, $t(1)=0$ takva da je za sve $x,y\in[0,1]$

$$T(x,y)=t^{-1}(\min(t(x)+t(y),t(0))).$$

Funkcija t se zove aditivni generator za T i ona je jedinstveno određena do na pozitivnu multiplikativnu konstantu.

Primedba 2 Među neprekidnim Arhimedovim t-normama postoje samo dve disjunktne klase i to:

1) Striktne ako su neprekidne i striktno monotone na otvorenom kvadratu $(0,1)^2$

2) Nilpotentne ako su neprekidne i svaki elemenat $a\in(0,1)$ je nilpotentan za T

Za neprekidnu t-normu važi sledeća reprezentacija

Teorema 3 Za funkciju $T:[0,1]^2\to[0,1]$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) T je neprekidna t-norma.

(ii) T je jedinstveno predstavljena kao ordinalna suma neprekidnih Arhimedovih t-normi

Definicija 3 Neka je T t-norma a S t-konorma. Kaže se da je t-norma uslovno distributivna u odnosu na t-konormu ako za sve $x,y,z \in [0,1]$ važi sledeća jednačina

$$\text{(CD) } T(x,S(y,z))=S(T(x,y),T(x,z)) \text{ uz uslov } S(y,z)<1$$

Sledeća teorema iz [6] daje kompletnu karakterizaciju familije neprekidnih parova (S,T) koji zadovoljavaju (CD) uslov.

Teorema 4 Neprekidna t-norma T i neprekidna t-konorma S zadovoljavaju (CD) uslov akko imamo bilo koji od sledeća dva slučaja:

(i) $S = S_M$.

(ii) Postoji striktna t-norma T^* i nilpotentna t-konorma S^* tako da je aditivni generator s od S^* koji zadovoljava $s(1)=1$ takođe multiplikativni generator od T^* i postoji $a \in [0,1)$ tako da za neku neprekidnu t-normu T^{**} imamo $T=(\langle 0,a,T^{**}\rangle,\langle a,1,T^*\rangle)$ i $S = (\langle a,1,S^*\rangle)$.

Primedba 3 1) Kako je t-konorma S^* nilpotentna a t-norma T^* striktna onda na osnovu propozicija 5.9 i 5.10 iz [6] možemo umesto S^* staviti S_L a umesto T^* T_P što je posebno važno kod nekih praktičnih primena (CD) uslova što će se kasnije videti.

2) Prethodna teorema takođe važi ako u (CD) uslov se stavi umesto t-norme T uninormu U koja predstavlja generalizaciju t-normi i t-konormi pošto njen neutralni elemenat može biti bilo koji broj $e \in [0,1]$. Videti [4]

Rezultat teoreme 4 može se jednostavno prikazati pomoću sledeće figure

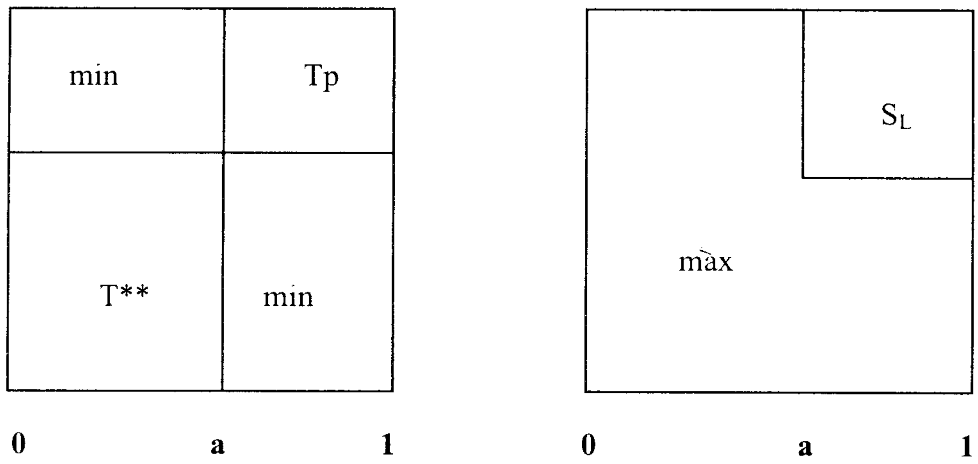

Figura 1

Struktura t-norme T **Struktura t-konorme S**

Na kraju ove sekcije uvešćemo pojam S-mere.

Definicija 4 Neka je X neprazan konačan skup, S t-konorma i $\mathcal{A}$ σ algebra podskupova od X . Preslikavanje $m:\mathcal{A}\rightarrow[0,1]$ zove se pseudo-aditivnom merom, kraće S-merom ako je $m(\varnothing)=0$, $m(X)=1$ i za sve $A,B\in\mathcal{A}$ sa $A\cap B=\varnothing$ imamo $m(A\cup B)=S(m(A),m(B))$

Jasno je da svaka mera $m:\mathcal{A}\rightarrow[0,\infty]$ sa Range(m)$\subseteq[0,1]$ je S_L-mera.

Preslikavanje $m:P(X)\rightarrow[0,1]$ je S_M-mera ako i samo ako za sve $A,B\in\mathcal{A}$ se ima $m(A\cup B)=S_M(m(A),m(B))$. Obično se ova mera zove merom mogućnosti.

Uopštena verovatnosna stabla

U ovoj sekciji vidi se jedna važnu primenu (CD) uslova. Poznato je da u teoriji verovatnoće jedan od osnovnih pojmova je nezavisnost odnosno postojanje specijalnih događaja $A_1,A_2,\dots,A_n$ tako da imamo sledeće

$$\mathbf{P(A_1\cap A_2\cap \dots\cap A_n)} = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad \mathbf{(1)}$$

Ovakvi događaji se zovu nezavisni događaji. Ako teorija pseudo-aditivnih mera želi biti korisna u praktičnoj primeni za modeliranje neodređenosti neka vrsta nezavisnosti mora biti i ovde zahtevana. Da bi se očuvala prednost nezavisnosti mora se zahtevati da važi (1) ukoliko umesto proizvoda se stavi bilo koji operator *. Nas interesuje koji su mogući operatori * kada zamenimo P sa S-merom. Jednostavno se zaključuje da operator * mora biti neprekidma t-norma. Kako nezavisnost u teoriji verovatnoće ima precizno značenje ovde govorimo o separabilnosti što vidimo u sledećoj definiciji.

Definicija 5 Događaji A i B su separabilni ako važi $m(A \cap B) = m(A) * m(B)$ za trougaonu normu *.

Neka su sada A,B,C tri događaja tako da $B \cap C = \varnothing$ i parovi (A,B) i (A,C) su sačinjeni od separabilnih događaja onda zbog distributivnosti preseka prema uniji imamo jaka ograničenja na izbor * kad je S fiksirano. U [3] je pokazano da imamo samo tri mogućnosti za pseudo-aditivnu meru i to:

- mera verovatnoće (i * je proizvod);
- mera mogućnosti i (* je neka t-norma);
- hibridna mera m tako da postoji $a \in (0,1)$ (videti teoremu 4) koja daje za disjunktne A i B

$$m(A \cup B) = \begin{cases} m(A) + m(B) - a & ako\ je\ m(A), m(B) > a, \\ \max(m(A), m(B)) & inače, \end{cases}$$

a za separabilnost

$$m(A \cap B) = \begin{cases} a + \dfrac{(m(A)-a)(m(B)-a)}{1-a} & ako\ je\ m(A), m(B) > a, \\ aT_1\left(\dfrac{m(A)}{a}, \dfrac{m(B)}{a}\right) & ako\ je\ m(A), m(B) \leq a, \\ \min(m(A), m(B)) & inače. \end{cases}$$

Poznato je da svaku distribuciju verovatnoće na konačnom skupu X možemo predstaviti kao niz binarnih lutrija. Binarna lutrija je četvorka (A,α,x,y) gde je $A \subset X$ i $\alpha \in [0,1]$ tako da $P(A)=\alpha$ predstavlja slučajan događaj koji proizvodi x ako se A dogodi a y inače. Neka je p verovatnoća na X tako da $p_i=p(x_i)$, $x_i \in X$. Neka je $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ onda p možemo predstaviti pomoću stabla na figuri 2 .

Binarno stablo je dobijeno na sledeći način. Prvo imamo particiju X u $\{x_1\}$ i $\{x_2, x_3\}$ sa verovatnoćama p_1 i p_2+p_3, onda imamo particiju $X \setminus \{x_1\}$ u $\{x_2\}$ i $\{x_3\}$ sa verovatnoćama $p_2/(p_2+p_3)$ i $p_3/(p_2+p_3)$. Dva stabla na figuri 2 su ekvivalentna ako je verovatnoća od x_i izračunata primenjivanjem proizvoda težina na putanji od korena stabla do lista x_i.

Neka je sada m S-mera na $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ i $m_i=m(\{x_i\})$. Pretpostavimo da želimo da dekomponujemo terarno stablo na figuri 3 u binarna tako da budu ekvivalentna.Tada imamo sledeće jednačine:

$$S(v_1,v_2)=1, \quad T(\mu,v_1)=m_2, \quad T(\mu,v_2)=m_3,$$

gde je T t-norma koja izražava separabilnost za S-meru. Prvi uslov izražava normalizaciju. Ako ove jednačine imaju jedinstvena rešenja onda ponavljajući ovu konstrukciju bilo koja distribucija S-mere može biti dekomponovana u niz binarnih lutrija. Pretvaranje S-mere u niz binarnih stabala vodi nas do nužnosti rešavanja sledećeg sistema jednačina.

$$\alpha_1=T(\mu,v_1),\ \alpha_2=T(\mu,v_2),\ S(v_1,v_2)=1 \qquad (2)$$

za dato α_1 i α_2. Primenjujući posledicu 2 iz [2] zna se da postoji jedinstveno rešenje (μ,v_1,v_2). Pretpostavljajući da je T** iz teoreme 4 minimum imamo rešen sistem jednačina (2) u [3] i prikazan u analitičkom obliku (μ,v_1,v_2).

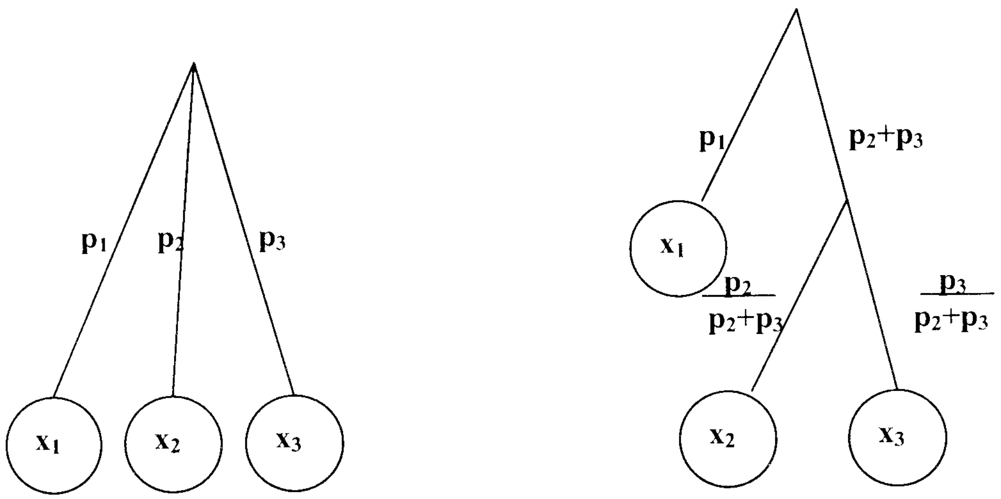

Figura 2. Stablo verovatnće i odgovarajuća binarna stabla

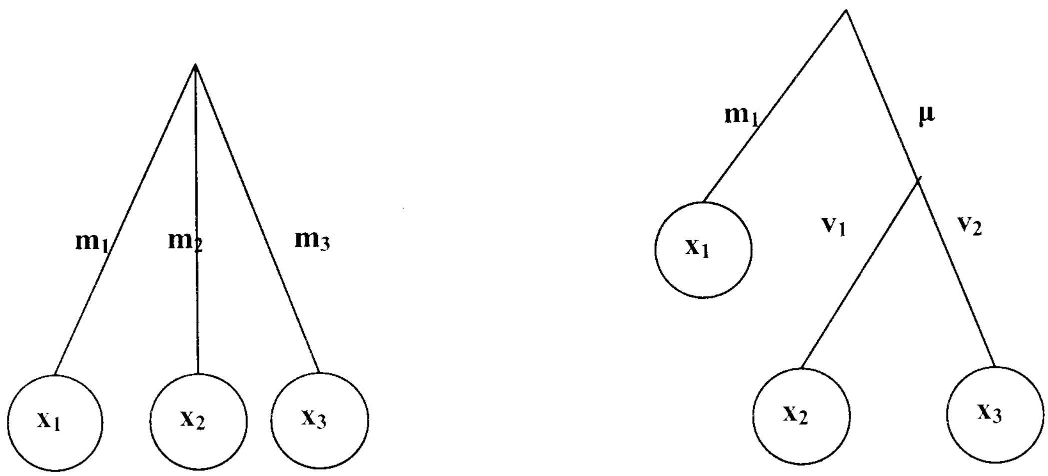

Figura 3. Stablo S-mere i odgovarajuća binarna stabla

Hibridna funkcija korisnosti

Ovde ćemo koristiti rezultate iz [2] sekcija 5 u nešto izmenjenoj verziji jer umesto para $(\oplus,\odot)$ koristimo (S,T) koji zadovoljavaju (CD) uslov. Definišimo skup Φ_S sa $\Phi_S=\{(\alpha,\beta)|\ (\alpha,\beta)\in[0,1]^2,\ S(\alpha,\beta)=1\}$.

Definicija 6 Proširen mešavina skup je četvorka (G,M,T,S) gde je G skup a $M:G^2\times\Phi_S\to G$ (proširena operacija mešavine) tako da su zadovoljena sledeća tri uslova:

M1 $M(x,y;1,0)=x$,

M2 $M(x,y;\alpha,\beta)=M(y,x;\beta,\alpha)$,

M3 $M(M(x,y;\alpha,\beta),y;\gamma,\delta)=M(x,y;T(\alpha,\gamma),S(T(\beta,\gamma),T(\delta,1)))$.

Uslovi M1-M3 impliciraju sledeći uslov na osnovu leme 1 iz [2]

M4 $M(x,x;\alpha,\beta)=x$.

U klasičnom poretku osobine M1-M3 impliciraju jednu važnu osobinu opercije mešavine što možemo videti u [5]. Ova osobina važi i za proširene mešavine pod dodatnim pretpostavkama kao što je to učinjeno u [2].

Lema 1 Neka je M proširena mešavina tj. M1-M3 važi za M. Onda imamo

M5 $M(M(x,y;\alpha,\beta),M(x,y;\gamma,\delta);\lambda,\mu)=M(x,y;S(T(\alpha,\lambda),T(\gamma,\mu)),S(T(\beta,\lambda),T(\delta,\mu))$

za sve $x,y\in G$ i sve (α,β), (γ,δ), $(\lambda,\mu)\in\Phi'$ gde je Φ' podskup od Φ akko T je distributivno prema S na Φ'.

Skup $\Phi'=\Phi_{S,a}$ uređenih parova (α,β) definiše se na sledeći način gde je broj a iz teoreme 4 $\Phi_{S,a}=\{(\alpha,\beta)\ |\ \alpha,\beta\in(a,1),\ \alpha+\beta=a+1$ ili $\min(\alpha,\beta)\le a,\ \max(\alpha,\beta)=1\}$.

Sada se definiše hibridni mešavina skup koji je proširenje mešavina skupova istraživanih u [2] i [5].

Definicija 7 Hibridni mešavina skup je četvorka (G,M,T,S) gde je (S,T) par neprekidnih t-normi i t-konormi koji zadovoljavaju (CD) uslov i $M:G^2\times\Phi_{S,a}\to G$ je funkcija (hibridna operacija mešavine) data sa

$$M(x,y;\alpha,\beta)=S(T(\alpha,x),T(\beta,y)).$$

Neka je (S,T) par neprekidnih t-normi i t-konormi oblika $(\langle S_M,S_L\rangle,\langle T_1,T_P\rangle)_a$. Neka su dalje u_1 i u_2 dve korisnosti koje uzimaju vrednosti iz jediničnog intervala [0,1], i μ_1, μ_2 dva stepena prihvatljivosti iz $\Phi_{S,a}$. Definišimo sada optimističku hidridnu funkciju korisnosti pomoću hibridne mešavine kao

$$U(u_1,u_2;\mu_1,\mu_2)=S(T(u_1,\mu_1),T(u_2,\mu_2)).$$

Ispitajmo detaljnije ovu funkciju korisnosti.

Slučaj I Neka je $\mu_1>a$, $\mu_2>a$, tj. $\mu_1+\mu_2=1+a$. Onda imamo sledeće podslučajeve:

(a) Neka je $u_1>a$, $u_2>a$. Tada imamo

$$U(u_1,u_2;\mu_1,\mu_2)=S\left(a+\frac{(u_1-a)(\mu_1-a)}{1-a},\, a+\frac{(u_2-a)(\mu_2-a)}{1-a}\right). \qquad \textbf{(3)}$$

Onda je $a+\dfrac{(u_i-a)(\mu_i-a)}{1-a}>a$ za sve i=1,2. Odavde zbog (3) imamo

$$U(u_1,u_2;\mu_1,\mu_2)=\frac{u_1(\mu_1-a)+u_2(\mu_2-a)}{1-a}.$$

(b) Neka je $u_1\leq a$, $u_2>a$. Onda imamo

$$U(u_1,u_2;\mu_1,\mu_2)=S\left(u_1,\, a+\frac{(u_2-a)(\mu_2-a)}{1-a}\right)=a+\frac{(u_2-a)(\mu_2-a)}{1-a}.$$

(c) Potpuno analogno za $u_1>a$, $u_2\leq a$ dobijamo da je

$$U(u_1,u_2;\mu_1,\mu_2)=a+\frac{(u_1-a)(\mu_1-a)}{1-a}.$$

(d) Neka je $u_1\leq a$, $u_2\leq a$. Onda imamo

$$U(u_1,u_2;\mu_1,\mu_2)=\max(u_1,u_2).$$

Slučaj II Neka je $\mu_1\leq a$, $\mu_2=1$ (analogno možemo razmatrati slučaj $\mu_2\leq a$, $\mu_1=1$). Onda imamo sledeće podslučajeve gde je S=max.

(a) Neka je $u_1>a$, $u_2>a$. Tada imamo

$$U(u_1,u_2;\mu_1,\mu_2)=S(\mu_1,u_2)=u_2.$$

(b) Neka je $u_1\leq a$, $u_2>a$. Onda imamo

$$U(u_1,u_2;\mu_1,\mu_2)=S\left(aT_1\left(\frac{u_1}{a},\frac{u_2}{a}\right),u_2\right)=u_2.$$

(c) Neka je $u_1>a$, $u_2\leq a$. Onda imamo

$$U(u_1,u_2;\mu_1,\mu_2)=S(\mu_1,u_2)=\max(\mu_1,u_2).$$

(d) Neka je $u_1\leq a$, $u_2\leq a$. Onda imamo

$$U(u_1,u_2;\mu_1,\mu_2)=\max\left(aT_1\left(\frac{u_1}{a},\frac{\mu_1}{a}\right),u_2\right).$$

Za T_1=min slučaj II i slučaj Id su zapravo mogućosna korisnost.

Stavljajući zajedno rezultate sekcija 3 i 4 korisnost n-arne lutrije može biti izračunata pomoću dekomponovanja S-mere u niz binarnih stabala primenjujući prethodnu šemu računanja za hidridnu korisnost rekurzivno od dna do vrha binarnog stabla.

Zaključak

Ono što je i dalje otvoren problem je pronalaženje odgovarajućih aksioma za hibridnu korisnost kao što je to učinjeno za klasičnu teoriju korisnosti i mogućnosnu teoriju korisnosti. Aksiomatika je razrađena u radu [9]

Literatura

[1] Dubois D., (1986) *Generalized probablistic independence and its implications for utility*, Operations Res. Letters 5, 255-260.

[2] Dubois D., Fodor J., Prade H., Roubens M., (1996) *Aggregation of decomposable measures with applications to utility theory*, Theory and Decision 41, 59-95.

[3] Dubois D., Pap E., Prade H., (2000) *Hibrid probablistic-possibilistic mixtures and utility functions*, (Eds. B.de Baets, J. Fodor, Perny), Preferences and Decisions under Incomplete Knowledge, volume 51 of Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer-Verlag, 51-73.

[4] Jočić D., (2005) *Uninorms and distributivity*, J. Electrical Engineering, 12

[5] Herstein I.N., Milnor J., (1953) *An axiomatic approach to measurable utility*, Econometrica 21, 291-297

[6] Klement E.P., Mesiar R., Pap E., (2000) *Triangular norms*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

[7] Neumann von J., Morgenstern O., (1944) *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ

[8] Pap E., (1995) *Null-Additive Set Functions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

[9] Pap E., Roca M., *An Axomatization of the Hybrid Probabilistic-Possibilistic Utility Theory*, Proc. of SISY 2006, 229-235.