Stručni rad

Škola biznisa
Broj 3/20011
UDC 519.218:330.322.54

Sanja Lončar*

PRIMENA PRVOSTEPENE I DRUGOSTEPENE STOHASTIČKE DOMINACIJE U RANGIRANJU INVESTICIJA

Sažetak: *Stohastička dominacija predstavlja moćan koncept u rangiranju investicionih alternativa. U radu je dat prikaz korišćenja prvostepene i drugostepene stohastičke dominacije u rangiranju investicionih alternativa, koristeći FSD i SSD algoritme za testiranje stohastičke dominacije. Osnovni cilj primene pravila stohastičke dominacije jeste minimizacija efikasnog skupa investicija.*

Ključne reči: *prvostepena stohastička dominacija, drugostepena stohastička dominacija, efikasni skup, očekivana korisnost*

APPLICATION OF FIRST AND SECOND ORDER STOCHASTIC DOMINANCE IN INVESTMENTS RANKING

Abstract: *Stochastic dominance is a powerful concept in the ranking of investment alternatives. The paper presents the use of first and second order stochastic dominance in ranking investment alternatives, using FSD and SSD algorithms for stochastic dominance testing. The main goal of using SD rules is minimization of efficient set.*

Key words*: first order stochastic dominance, second order stochastic dominance, efficient set, inefficient set, expected utility*

UVOD

Stohastička dominacija je koncept koji je široko korišćen u ekonomiji, finansijama i teoriji odlučivanja. Teorija stohastičke dominacije i njene teorijske i praktične primene u ekonomiji potiču od 1969–70. godine.

U pristupu stohastičke dominacije slučajne promenljive se porede tako što se koriste određene funkcije konstruisane iz njihovih raspodela. Putem koncepta stohastičke dominacije uvode se različite mere rizika: VaR, CVaR (ili TVaR ili ES), o kojima se

* Mr Sanja Lončar, magistar matematičkih nauka, asistent, Visoka poslovna škola strukovnih studija, Novi Sad, e-mail: sanja.lonchar@gmail.com

mogu naći podaci u sledećim radovima: (Acerbi, Nordio, Sirtor, 2001; Acerbi, Tasche, 2001; Gaivoronski, Pflug).

U svom radu Ogryczak i Ruszuczynski, polazeći od stohastičke dominacije, uvode dualne mere rizika u modelima očekivani prinos/rizik, dajući formulacije stohastičkog linearnog programiranja za te modele.

Prednost ovog koncepta, u odnosu na Markowitzov model, jeste što ne traži pretpostavku o funkciji raspodele slučajne promenljive prinosa. Ali nedostatak je što stohastička dominacija ne donosi efektivan postupak za izradu portfolia.

Polazeći od skupa svih raspoloživih investicija, koji se naziva *dopustivi skup*, putem relacija stohastičke dominacije vršimo njegovu podelu na dva disjunktna skupa: skup neefikasnih i skup efikasnih investicija.

Stohastička dominacija omogućava parcijalno uređenje skupa slučajnih promenljivih, koje su u našem slučaju prinosi investicija, a kako imamo samo parcijalnu informaciju o preferencijama investitora i, samim tim, izbora njihovih funkcija korisnosti, možemo ostvariti samo parcijalno uređenje datog skupa (Levi, 2006). Tako posmatrajući skup svih neopadajućih funkcija korisnosti, što implicira da investitor preferira veću zaradu, dolazimo do koncepta prvostepene stohastičke dominacije, a uvodeći pretpostavku da investitor ujedno ima i odbojnost ka riziku, tada posmatramo samo one funkcije korisnosti koje su neopadajuće i konkavne. Na ovaj način dolazimo do koncepta drugostepene stohastičke dominacije i ujedno dodavanjem informacije značajno smanjujemo skup efikasnih investicija.

U ovom radu prikazana je primena prvostepene i drugostepene stohastičke dominacije i odgovarajućih algoritama za testiranje dominacije na skupu od 497 akcija koje pripadaju S&P500 indeksu Njujorške berze, posmatrane u periodu od 23. maja 2011. do 18. novembra 2011. godine.

U nastavku rada su dati osnovni pojmovi u vezi sa konceptom stohastičke dominacije.

1. PRVOSTEPENA STOHASTIČKA DOMINACIJA

Definicija 1. Neka su X i Y slučajne promenljive, slaba relacija prvostepene stohastičke dominacije, u oznaci $\pm_{FSD}$, definiše se sa:

$$X \pm_{FSD} Y \Leftrightarrow F_X(\eta) \leq F_Y(\eta) \text{ za sve } \quad \eta \in \mathbb{R},$$

gde je $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ funkcija raspodela verovatnoća:

$$F_X(\eta) = P(X \leq \eta) \text{ za } \; \eta \in \mathbb{R}.$$

Princip rangiranja slučajnih promenljivih putem prvostepene stohastičke dominacije ilustrovan je na Slici 1, gde su prikazane slučajne raspodele verovatnoća tri slučajne promenljive sa uniformnom raspodelom. Jasno je da X dominira nad Y, dok se o odnosu slučajnih promenljivih X i Z, kao i Y i Z ne možemo ništa reći, budući da se njihove funkcije raspodela verovatnoća seku. Odgovarajuća *stroga relacija prvostepene stohastičke dominacije* $\succ_{FSD}$ definiše se se na sledeći način:

Definicija 2. Neka su X i Y slučajne promenljive. Kažemo da X dominira Y u oznaci $X \succ_{FSD} Y$, ako i samo ako je:

$$F_X(\eta) \le F_Y(\eta) \text{ za } \eta \in \mathbb{R}$$

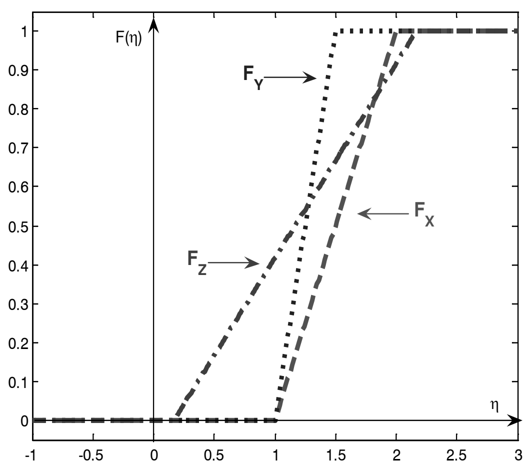
i za neko $\eta_0 \in \mathbb{R}$ važi $F_X(\eta_0) < F_Y(\eta_0)$.

Veza između prvostepene stohastičke dominacije i funkcija očekivane korisnosti $EU(\bullet)$ data je narednom teoremom, koju navodimo bez dokaza.

Teorema 1. $X \succ_{FSD} Y$ ako i samo ako je za sve neopadajuće funkcije korisnosti zadovoljeno:

$$EU(X) \ge EU(Y),$$

pri čemu važi stroga nejednakost za bar jednu neopadajuću funkciju korisnosti.



Slika 1. Funkcije raspodela verovatnoća uniformnih slučajnih promenljivih X, Y i Z. Relacije prvostepene stohastičke dominacije su: $X \succ_{FSD} Y$ $Y \not\succeq_{FSD} Z$, $Z \not\succeq_{FSD} Y$

2. DRUGOSTEPENA STOHASTIČKA DOMINACIJA

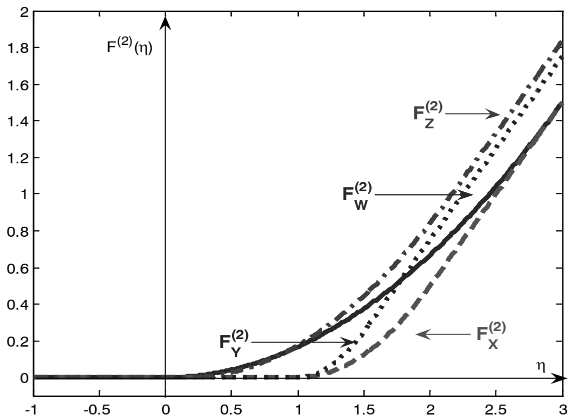
Definicija 3. *Slaba relacija* drugostepene stohastičke dominacije, u oznaci $\succeq_{SSD}$, definiše se sa:

$$X \pm_{SSD} Y \Leftrightarrow F_X^{(2)}(\eta) \leq F_Y^{(2)}(\eta) \quad \text{za sve} \quad \eta \in \mathbb{R} \ ,$$

gde je $F_X^{(2)}$ dato sa:

$$F_X^{(2)}(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} F_X(\xi) d\,\xi \quad \text{za} \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

Lako se dokazuje da iz $X \pm_{FSD} Y$ sledi $X \pm_{SSD} Y$, međutim obrnuti smer ne važi, primer je ilustrovan Slikom 2 gde vidimo da je $Y \pm_{SSD} Z$, ali poznato je da $Y \not\pm_{FSD} Z$, pa možemo zaključiti da je relacija drugostepene stohastičke dominacije „jača“ od relacije prvostepene stohastičke dominacije.



Slika 2. Prikaz funkcija $F_X^{(2)}$, $F_Y^{(2)}$, $F_Z^{(2)}$ i $F_W^{(2)}$ za uniformne slučajne promenljive X, Y, Z i W

Definicija 4. Neka su X i Y slučajne promenljive. Kažemo da X dominira Y prema SSD pravilu, u oznaci $X \succ_{SSD} Y$, ako i samo ako je $F_X^{(2)}(\eta) \leq F_Y^{(2)}(\eta)$ za sve $\eta \in \mathbb{R}$ i $F_X^{(2)}(\eta_0) < F_Y^{(2)}(\eta_0)$ za neko $\eta_0 \in \mathbb{R}$.

Teorema 2. $X \succ_{SSD} Y$ ako i samo ako je $E\,U(X) \geq E\,U(Y)$ za sve konkavne neopadajuće funkcije korisnosti, pri čemu važi stroga nejednakost za bar jednu neopadajuću konkavnu funkciju.

Sada imamo aparaturu da definišemo efikasnost neke investicione alternative, dakle vraćamo se na pojam dopustivog skupa i njegovu podelu na efikasni i neefikasni skup.

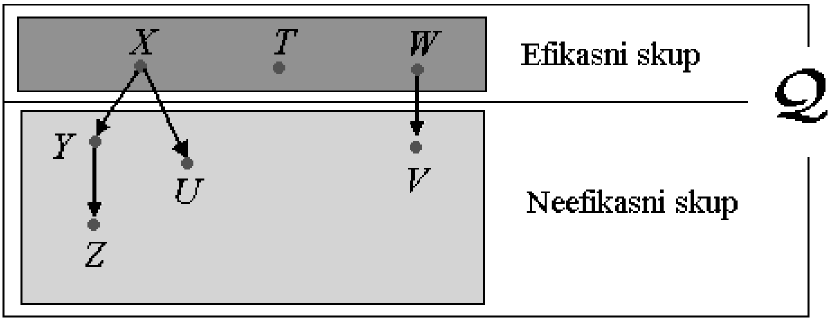
Definicija 5. Neka je $\mathcal{Q}$ skup slučajnih promenljivih. Slučajna promenljiva $X \in \mathcal{Q}$ je SSD(FSD)-efikasna u $\mathcal{Q}$, ako ne postoji slučajna promenljiva u $Y \in \mathcal{Q}$, takva da je $Y \succ_{SSD} X$ $(Y \succ_{FSD} X)$.

Prethodna definicija se može ilustrovati sledećim primerom:

Neka je dat skup slučajnih promenljivih $\mathcal{Q} = \{T, U, V, W, X, Y, Z\}$ i neka važe sledeće relacije drugostepene (prvostepene) stohastičke dominacije:

$$X \succ Y,\ X \succ Z,\ X \succ U,\ Y \succ Z, W \succ U.$$

Na osnovu Definicije 5 i Slike 3, koja ilustruje navedene relacije stohastičke dominacije slučajnih promenljivih iz skupa $\mathcal{Q}$, možemo zaključiti da su promenljive X, T i W SSD (FSD)-efikasne u $\mathcal{Q}$.



Slika 3. SSD(FSD)-efikasne i neefikasne slučajne promenljive u $\mathcal{Q}$

Polazeći od ekvivalencije drugostepene stohastičke dominacije i očekivane korisnosti za sve konkavne neopadajuće funkcije korisnosti, kao i činjenice da je konkavna funkcija korisnosti odbojna prema riziku, može se zaključiti da se u SSD-efikasnom skupu nalaze svi modeli investicionih alternativa koji preferiraju veće ishode bogatstva, a koji su istovremeno odbojni prema riziku.

SSD predstavlja pouzdan teorijski koncept za izbor odgovarajuće investicije, međutim, njegova primena u problemima odlučivanja u stvarnom svetu je komplikovana jer zahteva poređenje parova svih mogućih investicionih alternativa, zbog čega postoji potreba za jednostavnijim modelima, kao što su modeli očekivani prinos/rizik.

3. NUMERIČKI REZULTATI

U ovom radu posmatrali smo dnevne prilagođene cene akcija na zatvaranju, koje su komponente indeksa S&P500, u periodu od 23. maja 2011. do 18. novembra 2011. Tri akcije, čiji su tiker simboli: FO, MI i XYL, nisu uzete u obzir zbog nedovoljnog broja istorijskih podataka. Svi podaci su preuzeti sa sajta http://finance.yahoo.com/.

Pri utvrđivanju FSD i SSD relacija korišćeni su algoritmi koje su formulisali (Levi, 2006: 177). Svi podaci su obrađeni programskim paketom *MATLAB*.

Prinos je računat po formuli:

$$r_{ij} = \frac{P_{i\,j+1} - P_{i\,j}}{P_{i\,j}},$$

gde je $P_{i\,j}$ cena *i*-te investicije na početku *j*-tog perioda, tako dobijamo odgovarajuće vektore prinosa. Prinosi su izraženi u procentima.

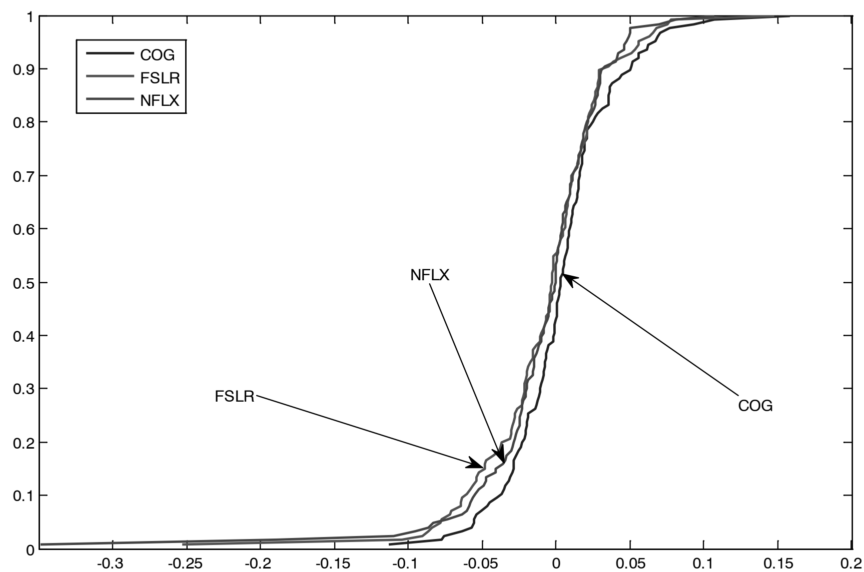
Budući da posmatramo istorijske podatke, pretpostavljamo da je svaka od *n* realizacija stope prinosa indeksa *i* jednako verovatna, pa empirijska raspodela ima oblik:

$$r_i : \begin{pmatrix} r_{i1} & r_{i2} & \dots & r_{in} \\ p_{i1} & p_{i2} & \dots & p_{in} \end{pmatrix},$$

gde je $p_{i\,j} = \frac{1}{n}$, i *n* je broj zapažanja. Tada je očekivani prinos indeksa *i* dat sa:

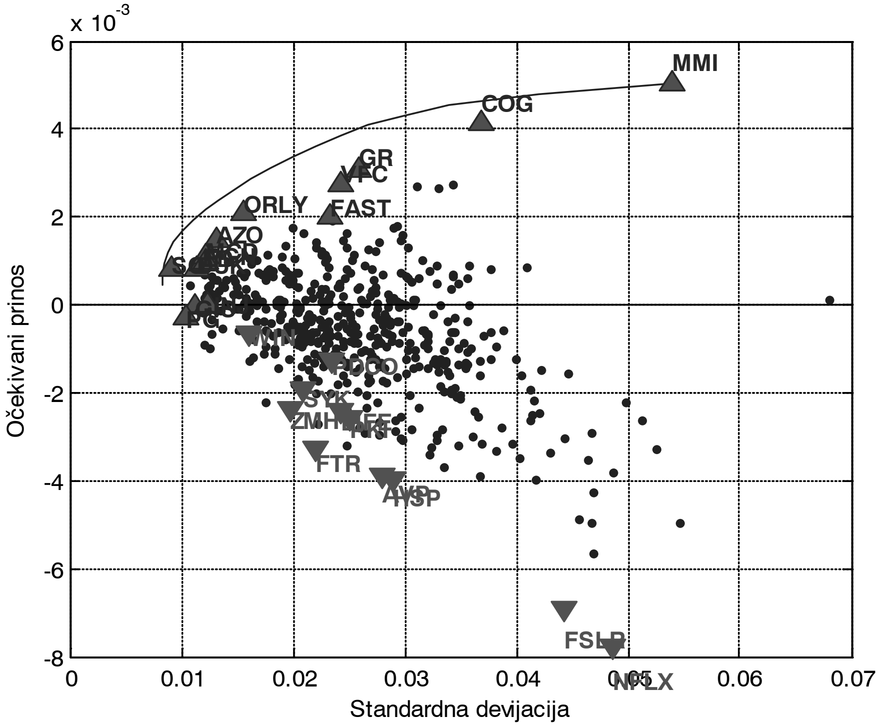
$$\overline{r_i} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}.$$

Nakon primene algoritma za utvrđivanje FSD dominacije pronađeno je 11 investicija koje su neefikasne, to su akcije sa tiker simbolima: AVP, FSLR, FTR, HSP, LIFE, NFLX, PDCO, PKI, SYK, WIN, ZMH, ostavljajući u efikasnom skupu 486 investicija koje su FSD-efikasne. Dakle, efikasni skup je praktično 98% dopustivog skupa. Slika 4 prikazuje odnos funkcija raspodela verovatnoća tri investicije, dok je na Slici 5 prikazan skup tih investicija u dijagramu standardna devijacija / očekivani prinos.



Slika 4. Funkcije raspodela verovatnoća za investicije COG FSLR i NFLX. Jasno je da investicija COG dominira i FSLR i NFLX po FSD pravilu. Samim tim i jedna i druga investicija su FSD neefikasne

Nakon primene algoritma za utvrđivanje SSD dominacije skup efikasnih investicija se sveo na 15, čineći tako svega 3% dopustivog skupa, ubrajajući time investicije sa tiker simbolima: AZO, COG, DUK, ED, FAST, GIS, GR, JNJ, MCD, MMI, ORLY, PG, PGN, SO, VFC.



Slika 5. Dijagram standardna devijacija / očekivani prinos sa dopustivog skupa investicija, sa FSD neefikasnim investicijama prikazanim znakom ▼ i SSD efikasnim investicijama prikazanim znakom ▲ i efikasna granica

ZAKLJUČAK

Kao što smo videli iz urađene analize za određeni skup investitorovih preferencija, dobijamo i odgovarajući efikasni skup. Što su pretpostavke slabije to je skup efikasnih investicija veći, a dodatkom informacije o averziji prema riziku efikasni skup se drastično smanjuje. Investicione alternative u SSD-efikasnom skupu su odgovarajuće svakom investitoru koji ima averziju prema riziku, ali u okviru efikasnog skupa se investicione alternative ne mogu porediti po kriterijumu koja je „bolja". U slučaju da imamo potpunu informaciju o funkciji korisnosti datog investitora, tada bismo imali kompletno uređenje skupa investicija i s lakoćom bi našli najbolju investicionu alternativu.

LITERATURA

[1] Acerbi, C., Nordio, C., Sirtori, C., (2001) *Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management*

[2] Acerbi, C., Tasche, D., (2001) *Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk*

[3] De Giorgi, E., (2004) *Reward-Risk portfolio selection and stochastic dominance*, "Journal of Banking and Finance", No. 29, pp. 895–926

[4] Gaivoronski, A. A., Pflug, G., *Properties and computation of value at risk efficient portfolios based on historical data, Department of Industrial Economics and Technology Management*, NTNU – Norwegian University of Science and Technology

[5] Levi, H., (2006) *Stochastic Dominance: Investment Decision Making under Uncertainty*, Second Edition, Springer

[6] Luenberger, D. G., (1998) *Investment Science*, Oxford University Press

[7] Ogryczak, W., Ruszuczynski, A., *Dual Stochastic Dominance and related mean-risk models*, "SIAM Journal on Optimization", Vol. 13, No. 1, pp. 60–78

Primljeno: 20.09.2011.
Odobreno: 25.09.2011.