Stručni rad

Škola biznisa
Broj 3/2011
UDC 519.872

Miloš Japundžić*

SIMULACIJE REDOVA ČEKANJA

Sažetak: *Ukoliko su relacije na kojima je izgrađen matematički model dovoljno jednostavne, moguće je koristeći standardne matematičke metode, kao što su algebra, analiza ili teorija verovatnoće, dobiti tačne informacije o problemu, to jest analitičko rešenje problema. Međutim, većina sistema iz stvarnog sveta su isuviše komplikovani da bi se njihovi modeli mogli rešiti analitički, te se ovi modeli rešavaju putem simulacija. U simulaciji koristimo kompjuter da bismo numerički izrazili osobine modela, a zatim te podatke koristimo za ocenjivanje pravih karakteristika sistema. U radu je razmotren konkretan primer simulacije za izračunavanje ocene prosečnog broja mušterija koje čekaju u M/M/1 redu za pružanje usluge.*

Ključne reči: *redovi čekanja, simulacije, procesi pristizanja, procesi usluživanja, prosečan broj mušterija u redu*

QUEUING SIMULATION

Abstract: *If the relations on which a mathematical model is built are simple enough then it is posible to use standard mathematical methods such as algebra, analysis or theory of probability in order to obtain accurate information about the problem, i.e. analytical solution of the problem. However, most real-world systems are too complex to be solved analytically, therefore these models need to be solved by simulation. In a simulation we use a computer in order to express properties of model numerically and then use this information to estimate the true characteristics of the system. The paper presented a concrete example of the simulation for evaluating average number of customers waiting in the M / M / 1 queue.*

Key words: *queuing, simulation, arrival processes, service processes, average number of customers in queue*

1. REDOVI ČEKANJA

Analiza redova čekanja (poznata i kao Teorija redova ili Teorija masovnog opsluživanja) pojavila se u prvoj deceniji dvadesetog veka, zahvaljujući danskom matematičaru A. K. Erlangu, koji je rešavao praktične zadatke opsluživanja u telefonskoj centrali. Inače, među prvim asocijacijama kada se pomenu redovi čekanja jesu redovi formirani u supermarketu, pošti, banci, ispred gradskih garaža... Međutim, mušterije ne moraju biti fizički prisutne na mestu pružanja usluge da bi došlo do formiranja redova čekanja. Naime, redovi čekanja se mogu formirati putem telefonskih poziva, na primer, prilikom

* Mr Miloš Japundžić, asistent, Visoka poslovna škola strukovnih studija, Novi Sad

narudžbi kataloških proizvoda, poziva taksi službe, ili poziva korisničkih servisa za softversku podršku, recimo, korisničkih servisa mobilne telefonije. Pored toga, mnogi ljudi svoje poslove obavljaju preko Interneta, pri čemu se u ovom slučaju redovi čekanja javljaju kao posledica usporenog pristupa određenom sajtu, usled preopterećenosti servera. Takođe, mušterije koje čekaju na pružanje usluge ne moraju biti samo ljudi, već to mogu biti i mašine, automobili, brodovi, avioni...

Svaki sistem u kome figurišu redovi čekanja može se opisati sa 6 karakteristika:

1 / 2 / 3 / 4 / 5 / 6.

Prva karakteristika se odnosi na prirodu procesa pristizanja mušterija i pri tome su uvedene sledeće skraćenice:

> M – Slučajne promenljive koje opisuju vreme proteklo između uzastopnih pristizanja mušterija su nezavisne, identično distribuirane slučajne promenljive sa eksponencijalnom raspodelom.

Druga karakteristika se odnosi na prirodu procesa usluživanja mušterija:

> M – Slučajne promenljive koje opisuju vreme potrebno za usluživanje mušterija su nezavisne, identično distribuirane slučajne promenljive sa eksponencijalnom raspodelom.

Treća karakteristika predstavlja broj servera u sistemu, dok se četvrta odnosi na redosled usluživanja mušterija:

FCFS (First Come, First Served) – prva mušterija koja dođe u red, biće prva i uslužena;

LCFS (Last Come, First Served) – mušterija koja poslednja stane u red, biće prva uslužena;

SIRO (Service In Random Order) – mušterija koja će biti uslužena bira se na slučajan način;

GD (General Queue Discipline) – bilo koji redosled usluživanja.

Peta karakteristika precizira maksimalno dopušten broj mušterija u sistemu. Na kraju, šesta karakteristika nam daje veličinu populacije iz koje mušterije pristižu. Primer jednog tipa redova čekanja jesu M / M /s / GD / c / ∞ redovi čekanja s servera u sistemu i kapacitetom od c mušterija. U mnogim važnim modelima 4 / 5 / 6 je GD / ∞ / ∞, pa je u tim slučajevima 4 / 5 / 6 izostavljeno.

Za sisteme u kojima dolazi do formiranja redova čekanja, metričke karakteristike koje su nam od značaja su prosečan broj mušterija prisutnih u sistemu (redu, procesu pružanja usluge), kao i prosečno vreme zadržavanja mušterije u sistemu (redu, procesu pružanja usluge).

1.1. PROCESI PRISTIZANJA I USLUŽIVANJA

Inače, da bi u potpunosti opisali redove čekanja moramo najpre precizirati ulazne i izlazne procese. Kod ulaznog procesa, koji se još naziva i *proces pristizanja* mušterija, od značaja nam je vreme koje protekne između uzastopnih pristizanja mušterija. Za izlazni proces, koji se još naziva i *proces usluživanja* mušterija, značajno nam je vreme potrebno za usluživanje mušterije.

Pristizanje mušterija u sistem se odvija saglasno Poasonovom procesu. To je stohastički proces $\{N(t), t \geq 0\}$, gde $N(t)$ predstavlja broj događaja određenog tipa koji su se desili do nekog vremenskog trenutka $t(t \geq 0)$, pri čemu ćemo u ovom slučaju pod događajima smatrati pristizanja mušterija u sistem. Osobine ovog procesa su:

1. U svakom vremenskom trenutku samo jedna mušterija pristiže u sistem.
2. $N(t + s) - \mathrm{N}(t)$ (broj pristizanja u vremenskom intervalu $(t, t + s]$) je nezavisan od $\{N(u), 0 \leq u \leq t\}$.
3. Raspodela $N(t + s) - \mathrm{N}(t)$ je nezavisna od t za svako $t, s \geq 0$.

Osobine 1 i 2 su karakteristične za mnoge procese pristizanja u realnosti. Osobina 1 ne važi ukoliko mušterije pristižu u grupi. Osobina 2 kaže da je broj pristizanja u intervalu $\left(t, t+s\right]$ nezavisan od broja pristizanja u ranijem intervalu $\left[0, t\right]$ i takođe od vremenskog trenutka u kome se ova pristizanja dešavaju. Osobina 3 će, međutim, biti često narušena u procesima pristizanja u svakodnevnom životu, budući da implicira da brzina pristizanja mušterija ne zavisi od doba dana, dana u nedelji, itd. Ako je, međutim, period od interesa relativno kratak, proizilazi da je za mnoge sisteme brzina pristizanja konstanta u toku tog kratkog intervala i Poasonov proces predstavlja dobar model za posmatrani proces u toku tog intervala.

Ako A_n predstavlja vreme koje protekne između pristizanja $(n - 1)$ i n-te mušterije u sistem (A_1 je vreme pristizanja prve mušterije), onda je u slučaju Poasonovog procesa A_n eksponencijalno distribuirano sa parametrom λ. Pri tome, $1/\lambda$ predstavlja prosečno vreme međupristizanja, dok λ predstavlja prosečan broj mušterija po jedinici vremena koje pristižu u sistem, odnosno brzinu pristizanja mušterija.

Ukoliko sa $N(t)$ označimo broj pristizanja mušterija u sistem u vremenskom intervalu $\left[0, t\right]$, tada je verovatnoća da će u sistem pristići tačno n mušterija data sa:

$$P\left\{N(t) = n\right\} = \frac{e^{-\lambda t}\left(\lambda t\right)^n}{n!}, \quad t \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Razmotrimo vremenske trenutke u kojima mušterije pristižu u sistem. Neka je vreme pojavljivanja prve mušterije A_1, druge $A_1 + A_2$, itd. Tada, prva mušterija pristiže u sistem nakon vremenskog trenutka t, ako i samo ako nema pristizanja u vremenskom intervalu $[0, t]$, što znači:

$$\{A_1 > t\} = \{N(t) = 0\},$$

pa je prema tome,

$$P\{A_1 > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t} \quad ,$$

gde poslednja jednakost proizilazi iz jednačine (1). Prema tome, verovatnoća da će prvo pristizanje mušterije u sistem biti u vremenskom intervalu $[0, t]$ data je sa:

$$P\{A_1 \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t} \, ,$$

što predstavlja funkciju raspodele slučajne promenljive sa eksponencijalnom raspodelom za parametar λ .

Znači, A_1 ima *eksponencijalnu* raspodelu sa parametrom λ i očekivanom vrednošću $E(A_1) = 1/\lambda$. Slično se može pokazati da su i sva ostala vremena međupristizanja u nizu $A_1, A_2, A_3, \ldots$ eksponencijalno distribuirana i nezavisna, sa očekivanjem $1/\lambda$.

Takođe, vreme potrebno za usluživanje mušterija se može modelirati eksponencijalnom raspodelom sa parametrom μ , pri čemu sada taj parametar predstavlja prosečan broj usluženih mušterija po jedinici vremena, odnosno brzinu usluživanja mušterija, dok $1/\mu$ predstavlja prosečno vreme usluživanja mušterija.

1.2. M/M/1 REDOVI ČEKANJA

Razmotrićemo primer najjednostavnijih $M/M/1$ redova čekanja. Kod sistema u kojima figurišu ovakvi redovi čekanja, postoji jedan red u kojem mušterije čekaju da budu uslužene od strane jedinog servera, dok je redosled usluživanja FCFS. Pri tome, svaka mušterija koja zatekne slobodan server odmah biva uslužena, dok u situaciji u kojoj je server zauzet staje u red za pružanje usluge. Nakon pružene usluge mušterija napušta sistem.

Što se tiče metričkih karakteristika sistema u kojima figurišu $M/M/1$ redovi čekanja, od naročitog nam je značaja prosečan broj mušterija u sistemu L, kao i prosečan broj mušterija koje čekaju u redu L_q. Analitički oblik navedenih metričkih karakteristika sistema zavisi, kako od brzine pristizanja mušterije u sistem λ tako i od brzine pružanja usluge μ , odnosno zadovoljeno je:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \, ,$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \,. \tag{2}$$

Inače, da bi jednakosti (2) bile zadovoljene, mora važiti nejednakost $\lambda < \mu$, odnosno brzina pristizanja mušterija mora biti striktno manja od brzine usluživanja, u suprotnom će doći do nagomilavanja mušterija u sistemu i formiranja beskonačnih redova čekanja.

Redovi čekanja se veoma često koriste za testiranje efikasnosti algoritama stohastičke optimizacije, s obzirom da spadaju u retke složene probleme iz realnog sveta koji imaju analitički oblik rešenja, koji je od koristi za proveru dobijenih rezultata.

2. SIMULACIJE

Simulacije predstavljaju tehniku koja koristeći računar oponaša funkcionisanje različitih objekata i procesa u realnom svetu. Objekat ili proces od interesa se obično naziva sistem, i u cilju njegovog proučavanja neophodno je načiniti skup pretpostavki o tome kako on funkcioniše. Te pretpostavke se formulišu u zavisnosti od naših saznanja i prikupljenih podataka o sistemu. Tako, na primer, kod redova čekanja uvodimo određene pretpostavke o procesima pristizanja i usluživanja mušterija, koje se odnose na raspodele odgovarajućih slučajnih promenljivih. Ove pretpostavke, koje obično imaju matematički oblik, konstituišu model nad kojim se onda sprovode kompjuterski bazirani eksperimenti, u cilju opisivanja, objašnjavanja i predviđanja ponašanja realnog sistema.

Kao primer upotrebe simulacija, razmotrimo primer industrijske kompanije koja razmišlja o velikom proširenju jedne od fabrika, ali nije sigurna da li će potencijalna produktivnost zadovoljiti troškove konstrukcije. Naravno, nije nimalo isplativo izgraditi proširenje, a zatim ga ukloniti ukoliko ne donosi željene rezultate. Međutim, pažljiva studija putem simulacija može dati odgovore na neka pitanja, simulirajući funkcionisanje fabrike u sadašnjosti i sa eventualnim proširenjem.

Nakon pokretanja programa simulacije, kompjuter generiše stohastičke promenljive koje korespondiraju sa zahtevima razmatranog sistema, kao što su, na primer, kod redova čekanja, vreme pristizanja i vreme potrebno za usluživanje mušterija. Drugim rečima, svako pokretanje simulacije je jedan eksperiment u kome se kompjuterski generisani ulazni podaci koriste za dobijanje izlaznih podataka, na osnovu kojih se onda ocenjuju stvarne karakteristike realnog sistema. Pri tome se ulazni podaci generišu saglasno preciziranim statističkim osobinama, za koje se pretpostavlja da ih oponašaju u realnom svetu.

Budući da je svako pokretanje simulacije eksperiment sa ulaznim podacima koji imaju statističke osobine, tako će i podaci dobijeni simulacijama takođe imati statistički karakter, pa je za njihovu korektnu interpretaciju potrebno primeniti prigodnu statističku analizu. To je inače najkritičniji deo u dizajniranju i implementaciji modela simulacije, s obzirom na to da je često veoma teško izvući neke opšte zaključke analizirajući izlazne podatke.

2.1. GENERISANJE UZORKA SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

Pretpostavimo da želimo generisati nezavisni uzorak (realizaciju) neke slučajne promenljive X neprekidnog tipa, čija je funkcija raspodele $F_X(x)$ poznata. Ispostavlja se da je u tu svrhu dovoljno znati generisati vrednosti sa jediničnom uniformnom raspodelom $U(0,1)$, budući da se onda preko nje mogu generisati sve ostale raspodele.

S obzirom na to da je funkcija raspodele $F_X(x)$ monotono neopadajuća funkcija na nekom konačnom ili beskonačnom intervalu, ima smisla definisati inverznu transformaciju:

$$X = F_X^{-1}(U), \tag{3}$$

gde je U slučajna promenljiva uniformno distribuirana na intervalu $(0,1)$. Pokazaćemo da, ako je realizacija slučajne promenljive X generisana tako što je najpre određena realizacija slučajne promenljive U, a zatim primenjena transformacija (3), onda važi:

$$P\{X \leq x\} = F_X(x), \tag{4}$$

odnosno da vrednosti X koje su izračunate pomenutom metodom inverzne transformacije predstavljaju uzorak populacije čija je funkcija raspodele baš $F_X(x)$. Da bismo dokazali jednakost (4), primetimo da važi:

$$P\{X \leq x\} = P\{F_X^{-1}(U) \leq x\} = P\{U \leq F_X(x)\}, \tag{5}$$

gde prva jednakost proizilazi iz (3), dok je druga jednakost posledica osobina funkcije raspodele. Pozivajući se na osobinu raspodele $U(0,1)$ da za svako $0 \leq u \leq 1$ važi:

$$P\{U \leq u\} = F_U(u) = u, \tag{6}$$

kombinujući (5) i (6) dobija se željena jednakost (4).

Pokazali smo da, ukoliko generišemo vrednosti uniformno distribuirane slučajne promenljive $U(0,1)$, možemo da preko tih vrednosti izračunamo skup vrednosti koji predstavlja uzorak za bilo koju raspodelu. Ostaje još samo pitanje kako generisati vrednosti za U. Na svu sreću, postoje lako dostupne procedure za generisanje vrednosti sa jediničnom uniformnom raspodelom $U(0,1)$. Te procedure, koje se nazivaju *generatori slučajnih brojeva*, su deo samog programskog jezika i predstavljaju ugrađene funkcije koje se lako pozivaju. Na primer, u programskom jeziku *Matlab*, koji se najčešće koristi za kreiranje simulacija, vrednosti sa jediničnom uniformnom raspodelom se dobijaju pozivajući ugrađenu funkciju – *rand*.

Iako je predloženi metod inverzne transformacije primenljiv u svim situacijama (za svaku raspodelu), to nije uvek najpraktičniji način za izbor vrednosti koje predstavljaju uzorak za određenu raspodelu. Recimo za jediničnu normalnu raspodelu $N(0,1)$, ukoliko se generisanje vrši u već pomenutom programskom jeziku *Matlab*, praktičnije je iskoristiti već ugrađenu funkciju – *randn*.

Nezavisni uzorak slučajne promenljive X diskretnog tipa, sa raspodelom verovatnoća $P\{X = x_i\} = p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$, takođe se može generisati preko jedinične uniformne raspodele $U(0,1)$. Opet je prvi korak generisanje vrednosti u slučajne promenljive $U(0,1)$, pri tome uzimamo $X = x_i$ u zavisnosti od:

$$\sum_{j=1}^{i-1} p_j < u < \sum_{j=1}^{i} p_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

pri čemu je prazna suma (za $i = 1$) jednaka 0.

3. SIMULACIJE REDOVA ČEKANJA

U prethodnoj sekciji smo diskutovali o parametrima koji karakterišu redove čekanja. Spomenuli smo spomenuli da se procesi pristizanja i usluživanja mušterija mogu modelirati slučajnim promenljivama sa eksponencijalnom raspodelom, pri čemu su u tom slučaju parametri, redom, λ i μ. Pri tome, λ predstavlja prosečnu brzinu pristizanja mušterija u sistem, dok je μ prosečna brzina usluživanja mušterija.

Da bismo simulirali redove čekanja, postavlja se pitanje kako generisati vreme pristizanja mušterije u sistem, kao i vreme potrebno za usluživanje mušterija, s obzirom na to da su ti događaji slučajni. To se može uraditi koristeći metod inverzne transformacije (3), koji se bazira na jediničnoj uniformnoj raspodeli $U(0,1)$. Naime, pretpostavimo da želimo generisati vrednost slučajne promenljive X, koja je eksponencijalno distribuirana sa parametrom τ. Njena funkcija raspodele $F_X(x)$ je data sa:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\tau x}, \quad (0 \le x < \infty),$$

pa saglasno relaciji (3) postavljamo:

$$U = F_X(X) = 1 - e^{-\tau X},$$

i rešavajući prethodnu jednačinu po X dobijamo:

$$X = -\frac{1}{\tau}\ln(1 - U). \tag{7}$$

S obzirom na to da važi pravilo ako je slučajna promenljiva U uniformna na intervalu $(0,1)$, onda je to i slučajna promenljiva $1 - U$, pa proizilazi da se relacija (7) može zameniti jednostavnijom:

$$X = -\frac{1}{\tau}\ln U. \qquad (8)$$

Prema tome, iz relacije (8) zaključujemo da je za dobijanje realizacije x slučajne promenljive X, sa eksponencijalnom raspodelom i parametrom τ, dovoljno generisati realizaciju u uniformne slučajne promenljive $U(0,1)$, a zatim izračunati x preko prirodnog logaritma koristeći formulu:

$$x = -\frac{1}{\tau}\ln u. \qquad (9)$$

Objasnićemo detaljnije simulaciju $M/M/1$ redova čekanja. Iako su sistemi u kojima figurišu ovakvi redovi čekanja veoma jednostavni u odnosu na sisteme iz realnog sveta, primer ove simulacije je reprezentativan i za mnogo komplikovanije sisteme.

Razmotrimo ocenu prosečnog broja mušterija koje čekaju u redu $L_q(n)$, gde n indicira da je ovaj prosečan broj uzet u odnosu na vreme simulacije potrebno za posmatranje n zadržavanja mušterija u redu. Primetimo da se ova prosečna vrednost uzima tokom vremena, a ne kao što je uobičajeno u odnosu na broj mušterija. U tu svrhu, sa $Q(t)$ obeležićemo broj mušterija u redu u vremenskom trenutku t, $t \geq 0$, dok će $T(n)$ biti vreme potrebno za posmatranje n zadržavanja u redu. Ako sa p_i označimo očekivani udeo vremena (koji se inače nalazi između 0 i 1) da će $Q(t)$ biti jednako sa i, onda je odgovarajuća definicija za $L_q(n)$ data sa:

$$L_q(n) = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i.$$

Da bismo $L_q(n)$ ocenili putem simulacije, zamenićemo proporcije p_i sa njihovim ocenama $\hat{p}_i$, pa na taj način dobijamo:

$$\hat{L}_q(n) = \sum_{i=0}^{\infty} i\hat{p}_i, \qquad (10)$$

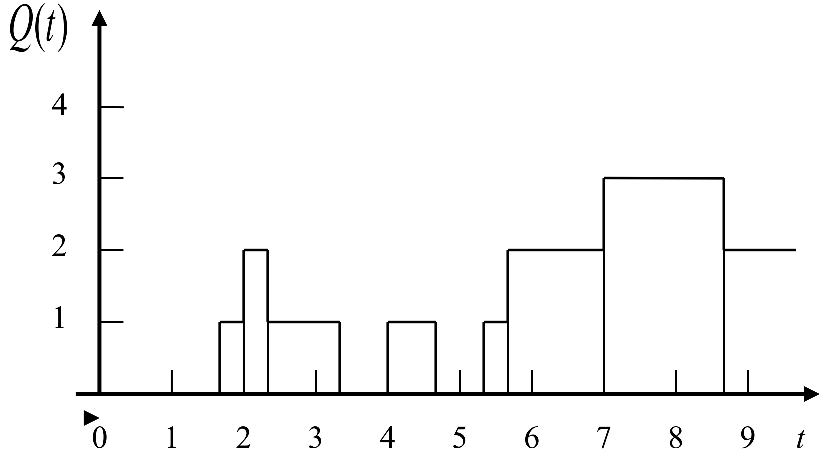
pri čemu je ˆ uočeni udeo vremena tokom simulacije da će u redu biti tačno i mušterija. Ukoliko sa T_i označimo ukupno vreme tokom simulacije u kojem je dužina reda i, tada je zadovoljeno $T(n) = T_0 + T_1 + T_2 \cdots$ i $\hat{p}_i = T_i / T(n)$, pa jednakost (10) ima novi oblik:

$$\hat{L}_q(n) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i T_i}{T(n)}. \qquad (11)$$

S obzirom na to da je prilikom implementacije simulacija posmatrani broj zadržavanja n konačan, te je i suma koja se pojavljuje u (11) takođe konačna. Naime, važiće $T_i = 0$

za svako $i > i_n$, gde je i_n najveća moguća dužina reda u realizacijama sa n zadržavanja u redu.

Navešćemo konkretan primer simulacije za izračunavanje ocene prosečnog broja mušterija koje čekaju u redu $\hat{L}_q(n)$, s obzirom na to da se implementacija simulacija na računaru bazira na geometrijskim razmatranjima koja ćemo interpretirati. Za kriterijum zaustavljanja simulacije izabraćemo $n = 6$ zadržavanja u redu.



Slika 1. Broj mušterija u redu u vremenskom trenutku *t*

Slika 1 ilustruje moguću realizaciju za broj mušterija koje čekaju u redu, $Q(t)$, kod $M/M/1$ redova čekanja i to za slučaj $n = 6$ zadržavanja u redu. Pristizanja mušterija u sistem su u vremenskim trenucima 0.4, 1.7, 2.0, 3.8, 4.0, 5.3, 5.8 i 7.0, dok su napuštanja sistema u vremenskim trenucima 2.3, 3.3, 3.4, 4.8 i 8.8, pri čemu se simulacija završava nakon što šesta mušterija, od onih koje su čekale u redu, kompletira uslugu, odnosno u vremenskom trenutku $T(6) = 8.8$.

Da bismo izračunali $\hat{L}_q(n)$ moramo najpre izračunati vrednosti $T_i,\ i = 0,1,2,\ldots,$ koje se mogu pročitati na grafikonu sa Slike 1, kao intervali (ponekad i disjunktni) tokom kojih je $Q(t)$ jednako sa $0,1,2,\ldots$:

$$T_0 = (1.7 - 0.0) + (4.0 - 3.3) + (5.3 - 4.8) = 2.9$$
$$T_1 = (2.0 - 1.7) + (3.3 - 2.3) + (4.8 - 4.0) + (5.8 - 5.3) = 2.6$$
$$T_2 = (2.3 - 2.0) + (7.0 - 5.8) = 1.5$$
$$T_3 = (8.8 - 7.0) = 1.8$$

($T_i = 0$ za sve $i > 3$, budući da u ovoj realizaciji u redu nikad ne čeka više od 3 mušterije). Na kraju, brojilac u jednakosti (11) iznosi:

$$\sum_{i=0}^{\infty} iT_i = (0 \times 2.9) + (1 \times 2.6) + (2 \times 1.5) + (3 \times 1.8) = 11 \quad ,$$

pa je ocena prosečnog broja mušterija koje čekaju u redu, u ovoj realizaciji simulacije, $\hat{L}_q(6) = 11/8.8 = 1.25$.

4. ZAKLJUČNA RAZMATRANJA

Geometrijska interpretacija sume koja se pojavljuje u jednakosti (11) je od izuzetne važnosti s obzirom na to da se na taj način simulacije implementiraju na računaru. Naime, iz prethodnih razmatranja proizilazi da ta suma predstavlja površinu oblasti ispod grafika funkcije $Q(t)$, ograničenu početnim i krajnjim trenutkom simulacije. Prema tome, krajnji rezultat simulacije predstavlja količnik površine oblasti ispod grafika funkcije $Q(t)$ (pomenuta oblast se sastoji od niza pravougaonika, što olakšava izračunavanje njene površine) i vremena trajanja simulacije.

Što se tiče same implementacije simulacija u izabranom programskom jeziku, odgovarajući programski kod je strukturiran tako da glavni program poziva šest potprograma koji redom predstavljaju inicijalizaciju simulacije, određivanje narednog događaja (pristizanje ili odlazak mušterije), pristizanje mušterije, odlazak mušterije, ažuriranje površine oblasti ispod grafika funkcije $Q(t)$, i generisanje slučajne promenljive sa eksponencijalnom raspodelom. Pri tome, ulazni parametri simulacije, na osnovu kojih se dobija prosečan broj mušterija u sistemu, jesu – prosečna brzina pristizanja mušterija u sistem λ i prosečno vreme usluživanja mušterija $\theta = 1/\mu$.

LITERATURA

[1] Japundžić, M., (2008) *Redovi čekanja*, XXXV simpozijum o operacionim istraživanjima, SYM-OP-IS, Sokobanja, 14-17. septembar 2008, str. 35–38, Univerzitet u Beogradu, Saobraćajni fakultet

[2] Japundžić, M., (2010) *Efikasnost modifikacija determinističkih postupaka u rešavanju problema stohastičke optimizacije*, magistarska teza, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku

[3] Law, A. M., Kelton, W. D., (2000) *Simulation Modeling and Analysis*, New York, McGraw-Hill

[4] L'Ecuyer, P., Giroux, N., Glynn, P. W., (1994) *Stochastic Optimization by Simulation: Numerical Experiments with the M/M/1 Queue in Steady-state*, "Management Science", Vol. 40, pp. 1245–1261, Institute for Operations Research and the Management Sciences

[5] Sheldon, R. M., (2002) *Introduction to Probability Models*, San Diego, Academic Press

[6] Winston, L. W., (1994) *Operations Research: Applications and Algorithms*, Belmont, California, Duxbury Press

Primljeno: 18.09.2011.
Odobreno: 27.09.2011.