Stručni rad

Škola biznisa
Broj 4/2011
UDC 005.334:[519.21:336.76

Sanja Lončar*

DUALNE MERE RIZIKA

Sažetak: *Rad je posvećen analizi ponašanja dualnih mera rizika poput TVaR-a, srednjeg apsolutnog odstupanja od kvantila i odsečka Đinijeve srednje razlike, i njihovoj konzistentnosti sa modelima očekivani prinos/rizik, koristeći istorijske podatke o cenama tri akcije sa američkog berzanskog tržišta.*

Ključne reči: *drugostepena stohastička dominacija, TVaR, srednje apsolutno odstupanje od kvantila i odsečak Đinijeve srednje razlike.*

DUAL RISK MEASURES

Abstract: *The purpose of this paper is to demonstrate behavior of dual risk measures, such as, Tail VaR (TVaR), Mean absolute deviation from a quantile and Tail Gini's mean difference and their consistency with mean-risk models, using historical prices for three US stocks.*

Key words: *second order stochastic dominance, Tail VaR (TVaR), Mean absolute deviation from a quantile, Tail Gini's mean difference.*

UVOD

U praksi se najčešće koriste dva pristupa u izboru optimalnog portfolia, prvi se zasniva na maksimizaciji funkcije očekivane korisnosti, koja je konkavna i monotono neopadajuća, ispoljavajući investitorovu averziju prema riziku i činjenicu da preferira veću zaradu, što odgovara drugostepenoj stohastičkoj dominaciji. Drugi pristup je zasnovan na poznatom modelu očekivani prinos/rizik. U opštem slučaju ova dva modela nisu konzistentna (De Giorgi, 2005).

Definicija 1. *Slaba relacija drugostepene stohastičke dominacije,* u oznaci $\pm_{SSD}$, definiše se sa:

$$X \pm_{SSD} Y \Leftrightarrow F_X^{(2)}(\eta) \leq F_Y^{(2)}(\eta) \quad \text{za sve } \eta \in \mathbb{R},$$

gde je $F_X^{(2)}$ dato sa:

---

* Mr Sanja Lončar, asistent, Visoka poslovna škola strukovnih studija, Novi Sad, e-mail: sanja.lonchar@gmail.com.

$$F_X^{(2)}(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} F_X(\xi)\,d\xi \quad \text{za} \quad \eta \in \mathbb{R}$$

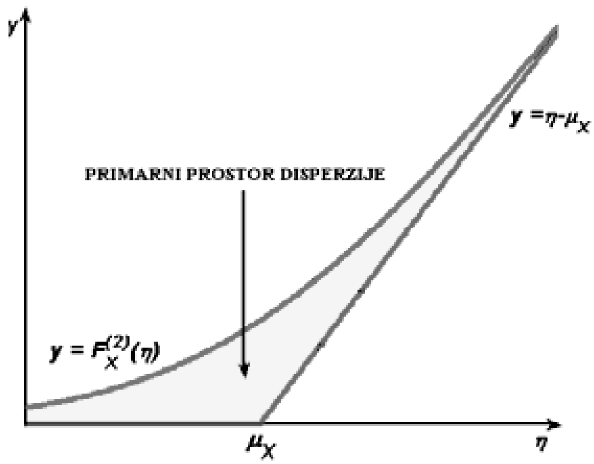
i F_X je funkcija raspodela verovatnoća slučajne promenljive X:

$$F_X(\eta) = P(X \le \eta) \text{ za } \eta \in \mathbb{R}.$$

Grafik funkcije $F_X^{(2)}$ naziva se *dijagram ishod/rizik*. Njene asimptote se seku u tački $(\mu_X, 0)$. U slučaju determinističkih ishoda, grafik $F_X^{(2)}$ se podudara sa asimptotama, tj. važi:

$$F_X^{(2)}(\eta) = \max(\eta - \mu_X, 0),$$

dok se bilo koji neizvesni ishod sa istom očekivanom vrednošću μ_X nalazi iznad, ili na asimptotama (Slika 1).



Slika 1. Dijagram ishod/rizik i primarni prostor disperzije

Prostor između krive $\left(\eta, F_X^{(2)}(\eta)\right)$, $\eta \in \mathbb{R}$ i njenih asimptota predstavlja disperziju slučajne promenljive X u poređenju sa determinističkim ishodom istog matematičkog očekivanja μ_X i naziva se *primarni prostor disperzije* i predstavlja rizičnost nedeterminističkih ishoda.

1. KONZISTENCIJA SA SSD

Kako u opštem slučaju primena SSD pravila u praksi, nije jednostavan postupak (Ogryczak, Ruszinsky, 2002), budući da zahteva poređenje parova funkcija raspodela verovatnoća, odnosno funkcija $F_X^{(2)}$, Ogryczak i Ruszinsky u svom radu iz 2002. polaze od modela očekivani prinos/rizik koji će im omogućiti izvođenje zaključka da li je raspodela ishoda dominirana ili ne. Shodno tome, unose definiciju konzistentnosti modela očekivani prinos/rizik sa SSD relacijom:

Definicija 2. Model očekivani prinos/rizik (μ_X, r_X) je *konzistentan sa SSD* ako važi sledeća relacija:

$$X \pm_{SSD} Y \Rightarrow \mu_X \geq \mu_Y \ \text{ i } \ r_X \leq r_Y,$$

gde je r_X neki nenegativni funkcional koji odgovara riziku, a μ_X matematičko očekivanje slučajne promenljive *X*.

Poznato je da važi $X \pm_{SSD} Y \Rightarrow \mu_X \geq \mu_Y$ (Levy, 1992), ali da $X \pm_{SSD} Y \Rightarrow r_X \leq r_Y$ nije tačno za neke mere rizika, npr. za varijansu.

Kako neke opšteprihvaćene mere rizika nisu konzistentne sa SSD i pošto se u modelu očekivani prinos/rizik vrši maksimizacija skalarne funkcije, $\mu_X - \lambda r_X$, gde je λ *trade-off* koeficijent, uvodi se slabiji uslov konzistencije (Ogryczak, Ruszinsky, 2001):

Definicija 3. Kažemo da je model očekivani prinos/rizik (μ_X, r_X) α-konzistentan sa SSD, gde je α>0, ako je sledeća relacija tačna:

$$X \pm_{SSD} Y \Rightarrow \mu_X - \alpha r_X \geq \mu_Y - \alpha r_Y.$$

Jasno je da iz konzistencije sledi α-konzistencija, ali takođe važi i tvrđenje: iz α-konzistencije sledi λ-konzistencija, za sve $0 \leq \lambda \leq \alpha$.

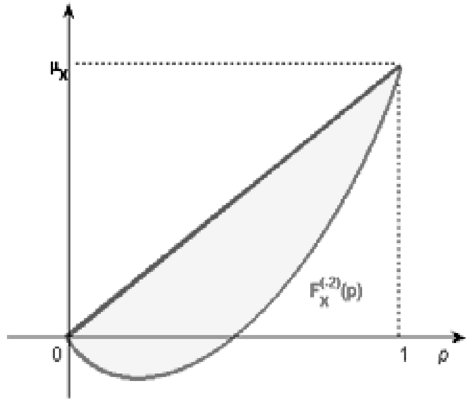
2. DUALNE PROSTOR DISPERZIJE

Definicija 4. Funkcija kvantila $F_X^{(-2)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ definisana sa:

$$F_X^{(-2)}(p) = \int_0^p F_X^{(-1)}(\alpha)\, d\alpha, \ p \in (0,1]$$

gde je $F_X^{(-1)}(p) = \inf\{\eta : F_X(\eta) \geq p\}$, $p \in (0,1]$.

Sada se funkcija kvantila $F_X^{(-2)}$ može posmatrati na novi način: neka je *p□(0,1)* i pretpostavimo da postoji η, takvo da je $P\{X \leq \eta\} = p$. Tada, važi $F_X^{(-2)}(p) = pE(X \mid X \leq \eta)$ što nam daje bolji uvid u samu funkciju ali ne može biti definicija, jer ne mora uvek postojati takvo η, da je $P\{X \leq \eta\} = p$.



Slika 2. Dijagram apsolutne Lorencove krive i dualni prostor disperzije slučajne promenljive sa normalnom raspodelom

Polazeći od Definicije 1 i Definicije 4, uvodimo ekvivalenciju između relacije drugostepene stohastičke dominacije i funkcije kvantila $F_X^{(-2)}$:

Teorema 1. $X \pm_{SSD} Y \Leftrightarrow F_X^{(-2)}(p) \geq F_Y^{(-2)}(p)$, $p \in [0,1]$.

Grafik $F_X^{(-2)}$ se naziva *dijagram apsolutne Lorencove krive*. Grafička interpretacija (Slika 2) daje dodatni uvid u svojstva $F_X^{(-2)}$: za bilo koji neizvesni ishod X njena apsolutna Lorencova kriva $F_X^{(-2)}$ je neprekidna konveksna kriva koja povezuje tačke $(0,0)$ i $(1, \mu_X)$, gde deterministički ishod sa istim očekivanjem odgovara tetivi krive koja spaja gore pomenute tačke.

To znači da je prostor između krive $F_X^{(-2)}$ i njene tetive povezan sa rizikom neizvesnog ishoda X u poređenju sa determinističkim ishodom. Taj prostor se naziva *dualni prostor disperzije*. Veličina i oblik ovog prostora daje potpuni opis rizičnosti X. Jedan od parametara koji opisuje dualni prostor disperzije je njegov vertikalni dijametar, koji se definiše na sledeći način:

Definicija 5. Vertikalni dijametar prostora dualne disperzije je dat sa:

$$h_X(p) = \mu_X p - F_X^{(-2)}(p),$$

gde je μ_X matematičko očekivanje slučajne promenljive X.

Lako se dokazuje da za svako $p \in (0,1)$,

$$h_X(p) = \min_{\xi \in \mathbb{R}} E\left\{\max\left(p(X-\xi),(1-p)(\xi - X)\right)\right\},$$

a minimum se dostiže u svakom p-kvantilu.

3. DUALNE MERE RIZIKA

U ovom delu ćemo se upoznat sa nekim merama rizika, kao što su –TVaR, srednje apsolutno odstupanje od kvantila i odsečak Đinijeve srednje razlike.

3.1. TVaR

Relacija u teoremi 1 može se zapisati i u obliku:

$$X \pm_{SSD} Y \Leftrightarrow \frac{F_X^{(-2)}(p)}{p} \geq \frac{F_Y^{(-2)}(p)}{p}, \; p \in (0,1],$$

te se uvodi mera sigurnosti TVaR definisana sa:

$$\mathrm{TVaR}_X(p) = \frac{F_X^{(-2)}(p)}{p}.$$

Samim tim $-\mathrm{TVaR}_X$ je mera rizika i važi sledeće tvrđenje:

Teorema 2. Model očekivani prinos/rizik je $(\mu_X, -\mathrm{TVaR}_X)$ konzistentan sa SSD relacijom.

Ako se iskoristi relacija $F_X^{(-2)}(p) = pE(X \mid X \leq \eta)$, TVaR dobija novi oblik:

$$\mathrm{TVaR}_X(F_X(\eta)) = E(X \mid X \leq \eta).$$

Funkcija $\mathrm{TVaR}_X : (0,1] \to \mathbb{R}$ je neopadajuća, neprekidna i $\mathrm{TVaR}_X(1) = \mu_X$. Za svako $p \in (0,1)$ odgovarajuća TVaR vrednost može se izračunati, kao:

$$\mathrm{TVaR}_X(p) = E(X) - \min_{\xi \in \mathbb{R}} E\left(\max\left((X-\xi), \frac{1-p}{p}(\xi - X)\right)\right).$$

Gornja formula se može napisati i u obliku:

$$\mathrm{TVaR}_X(p) = \max_{\xi \in \mathbb{R}}\left(\xi - \frac{1}{p}E\{\max(0, \xi - X)\}\right).$$

Gornji izraz zajedno sa definicijom za CVaR (Pflug, 2000):

$$\mathrm{CVaR}_X(p) = \inf_{\xi \in \mathbb{R}}\left(\xi + \frac{1}{1-p}E\{\max(0, X - \xi)\}\right),$$

daje mogućnost da uspostavimo vezu između TVaR-a i CVaR-a za slučajnu promenljivu prinosa X neke investicije:

$$\mathrm{CVaR}_{-X}(1-p) = -\mathrm{TVaR}_X(p).$$

TVaR je poznat i kao CVaR (Rockafellar, Uryasev, 2000), AVaR (Pflug, Römisch, 2007) i očekivani deficit. Veza između CVaR i TVaR nam govori, da nema suštinske razlike između gore definisanih veličina TVaR i CVaR, već je razlika samo u pristupu: uobičajeno je da se CVaR računa za slučajnu promenljivu gubitka za nivoe poverenja 90%, 95% i 99%. Dok se TVaR računa sa nivoom poverenja 1%, 5% i 10% za promenljivu prinosa. Jasno je da ako sa X označimo promenljivu prinosa, onda je $-X$ slučajna promenljiva gubitka.

Za slučajnu promenljivu gubitka CVaR je sredina desnog $(1-p)$ odsečka distribucije. On nam daje informaciju o tome koliko možemo da očekujemo da ćemo izgubiti ukoliko se sa verovatnoćom p realizovao „loš" događaj.

3.2. SREDNJE APSOLUTNO ODSTUPANJE OD KVANTILA

Srednje odstupanje od kvantila je mera rizika definisana pomoću dijametra dualnog prostora disperzije i važi sledeća teorema:

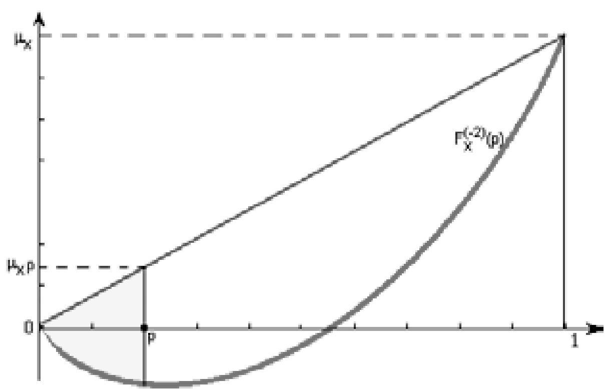
Teorema 3. Za svako $p \in (0,1)$ model očekivani prinos/rizik $\left(\mu_X, h_X(p)/p\right)$, gde je $h_X(p)$ vertikalni dijametar dualnog prostora disperzije, je *1*-konzistentan sa SSD relacijom.

3.3. ODSEČAK ĐINIJEVE SREDNJE RAZLIKE

Đinijevu srednju razliku, kao meru rizika u modelu očekivani prinos –rizik, prvi put je uveo Yitzhaki, 1982. godine. U cilju modeliranja averzije prema riziku da ostvareni prinos bude ispod očekivanog (eng. *downside risk*), umesto Đinijeve srednje razlike Ogryczak i Ruszczynski, u radovima iz 2001. i 2002, uvode odsečak Đinijeve srednje razlike.

Definicija 6. Za $p \in (0,1]$ definišemo meru rizika kao odsečak Đinijeve srednje razlike (Slika 3):

$$G_X(p) = \frac{2}{p^2}\int_0^p \left(\mu_X \alpha - F_X^{(-2)}(\alpha)\right) d\alpha .$$



Slika 3. Odsečak Đinijeve srednje razlike

Teorema 4. Za svako $p \in (0,1]$ $X \pm_{SSD} Y \Rightarrow \mu_X - G_X(p) \geq \mu_Y - G_Y(p)$.

Na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da je Đinijeva srednje razlike *1*-konzistentna sa SSD.

4. NUMERIČKI REZULTATI

U ovom radu posmatrali smo dnevne prilagođene cene akcija na zatvaranju za tri akcije kompanija *Precision Castparts Corporation*, *Fastenal Company* i *Genworth Financial Inc. Common S*, čiji su tiker simboli redom: PCP, FAST i GNW, u periodu od 23. maja 2011. do 18. novembra 2011. Podaci su preuzeti sa sajta: http://finance.yahoo.com/.

Prinos je računat po formuli :

$$r_{ij} = \frac{P_{i\,j+1} - P_{i\,j}}{P_{i\,j}},$$

gde je $P_{i\,j}$ cena *i*-te akcije na početku *j*-tog perioda. Budući da posmatramo istorijske podatke, pretpostavljamo da je svaka od *n* realizacija stope prinosa investicije *i* jednako verovatna, pa empirijska raspodela ima oblik:

$$r_i : \begin{pmatrix} r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{in} \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{in} \end{pmatrix},$$

gde je $p_{i\,j} = \frac{1}{n}$, a *n* je broj zapažanja. Mere rizika su računate na sledeći način, pri čemu je korišćeno *p*=0,05:

TVaR(CVaR):

$$\text{TVaR}_X(p) = q_X^+(p) - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{N} \max\left\{0, q_X^+(p) - x_i\right\},$$

gde je $q_X^+(p)$ desni *p*-kvantil.

$$\text{CVaR}_{-X}(1-p) = -\text{TVaR}_X(p).$$

Srednje apsolutno odstupanje od kvantila:

$$\frac{h(p)}{p} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} \max\left\{p\left(x_i - q_X^+(p)\right), (1-p)\left(q_X^+(p) - x_i\right)\right\} p_i.$$

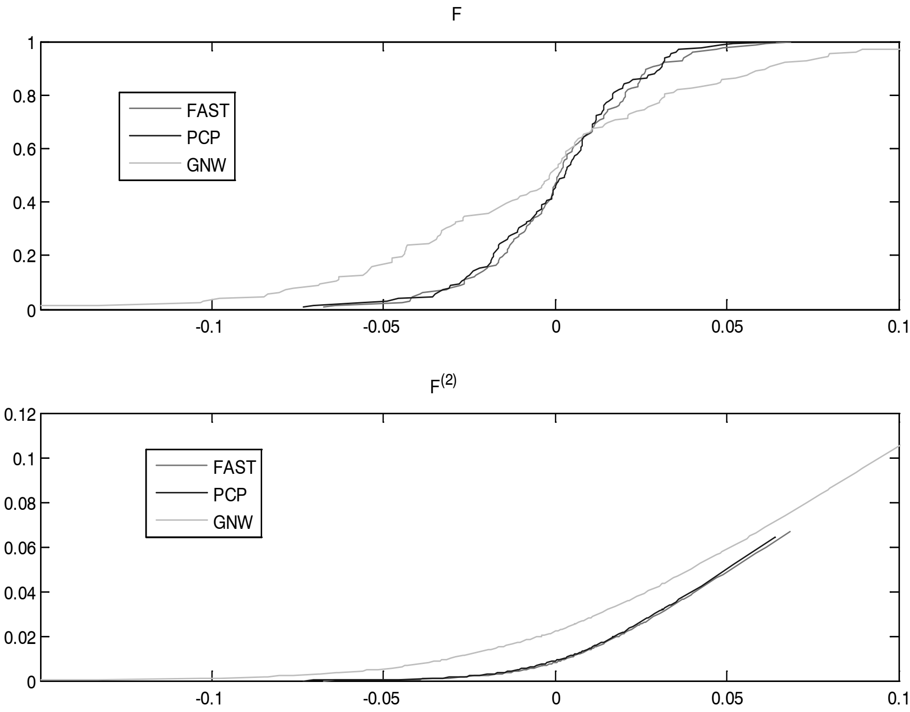
Odsečak Đinijeve srednje razlike:

$$G_X(p) = \frac{2}{p^2}\int_0^p h_X(t)\,dt,$$

gde je integral aproksimiran pomoću složene trapezne formule tj. za dato p postoji k takvo da je $\frac{k}{n} < p \leq \frac{k+1}{n}$. Posmatramo podelu intervala $[0, p]$ na $k+1$ podintervala u tačkama $\tau_i = \frac{i}{n}$, $i = 0,1,\ldots,k$ i $\tau_{k+1} = p$. Iz trapezne formule sledi:

$$\int_0^p h_X(t)\,dt = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{2}\left(h(\tau_i) - h(\tau_{i-1})\right).$$

Koristeći algoritam za utvrđivanje drugostepene stohastičke dominacije (Levy, 2008), dobijamo da akcija sa tiker simbolom FAST dominira akciju PCP na osnovu pravila o drugostepenoj stohastičkoj dominaciji, takođe akcija PCP dominira GNW po SSD pravilu, što se vidi i sa slike funkcije $F_X^{(2)}$ (Slika 4).



Slika 4. Funkcija raspodela verovatnoća (F) i funkcija $F^{(2)}$ za slučajne promenljive prinosa akcija sa tiker simbolima FAST, PCP i GNW

Tabela 1. Matematičko očekivanje, varijansa i neke dualne mere rizika

	Matematičko očekivanje	**Varijansa**	**–TVaR**	**Srednje apsolutno odstupanje od kvantila**	**Odsečak Đinijeve srednje razlike**
FAST	0,0020	$5{,}4252 \cdot 10^{-4}$	0,0498	0,0518	0,0573
PCP	0,0006	$5{,}3099 \cdot 10^{-4}$	0,0542	0,0548	0,0625
GNW	-0,0033	0,0028	0,1137	0,1104	0,1252

ZAKLJUČAK

Iz priloženih primera se vidi, iako FAST dominira PCP, da je varijansa slučajne promenljive prinosa akcije FAST veća od varijanse prinosa slučajne promenljive PCP, čime je ilustrovana nekonzistentnost ove mere rizika sa SSD pravilom, s druge strane dualne mere rizika –TVaR, srednje apsolutno odstupanje od kvantila i odsečak Đinijeve srednje razlike, u potpunosti opisuju njihov međusobni odnos po pravilu drugostepene stohastičke dominacije.

LITERATURA

[1] De Giorgi, E., (2004) *Reward-Risk portfolio selection and stochastic dominance*, "Journal of Banking and Finance", No. 29, pp. 895–926.

[2] Levi, H., (1992) *Stochastic dominance and expected utility: survey and analysis,* "Management Science", No. 38, pp. 555–593.

[3] Levi, H., (2006) *Stochastic Dominance: Investment Decision Making under Uncertainty*, Second Edition, Springer.

[4] Pflug, G. Ch., Römisch, W., (2007) *Modeling, measuring, and managing risk*, World Scientific Publishing Company.

[5] Rockafellar, R. T., Uryasev, S., (2000) *Optimization of conditional value-at-risk*, "The Journal of Risk", No. 2 (3), pp. 21–41.

[6] Ogryczak, W., Ruszuczynski, A., (2002) *Dual Stochastic Dominance and related mean-risk models*, SIAM Journal on Optimization, Vol. 13, No. 1, pp. 60–78.

[7] Ogryczak, W., Ruszuczynski, A., (2001) *On consistency of stochastic dominance and mean-semideviation models*, Mathematical Programming, No. 89, pp. 217–232.

[8] Yitzhaki, S., (1982) *Stochastic dominance, mean variance, and Gini's mean difference*, "American Economic Review", No. 72 (1982), pp. 178–185.

Primljeno: 28.11.2011.
Odobreno: 06.12.2011.