Stručni rad

Škola biznisa
Broj 2/2012
UDC 330.322:519.254

Sanja Lončar*
Emina Tepavac**

PRIMENA ALGORITMA ZA TREĆESTEPENU STOHASTIČKU DOMINACIJU U RANGIRANJU INVESTICIJA

Sažetak: *U radu je dat prikaz korišćenja trećestepene stohastičke dominacije u rangiranju investicionih alternativa, korišćenjem TSD algoritama (Levy,2006) za testiranje trećestepene stohastičke dominacije. Osnovni cilj primene pravila stohastičke dominacije jeste minimizacija efikasnog skupa investicija, pri čemu investitor preferira veće iznose novca i ima averziju prema riziku, kao i sklonost ka pozitivnoj asimetričnosti distribucije stope prinosa.*

Ključne reči: *trećestepena stohastička dominacija, asimetričnost, algoritam.*

APPLICATION OF THIRD ORDER STOCHASTIC DOMINANCE ALGORITHM IN INVESTMENTS RANKING

Abstract:*The paperpresents theuse ofthird orderstochastic dominance inranking investmentalternatives, using TSDalgorithms (Levy, 2006)for testingthird order stochastic dominance. The main goal of using TSD rule is minimization of efficient investment set for investor with risk aversion, who prefers more money and likes positive skewness.*

Key words: *third order stochastic dominance, skewness, algorithm.*

Uvod

Koncept stohastičke dominacije predstavlja uopštenje teorije očekivane korisnosti. Uvodeći parcijalno uređenje u skup slučajnih promenljivih, stohastička dominacija je našla široku upotrebu u poljima poput finansija, ekonomije, medicine i poljoprivrede.

*MrSanjaLončar, magistarmatematičkihnauka, asistent, Visokaposlovnaškolastrukovnihstudija, Novi Sad, VladimiraPerićaValtera 4, telefon: 021/485-4008, e-mail: sanja.lonchar@gmail.com.

**EminaTepavac, diplomiraniinformatičar, Visokaposlovnaškolastrukovnihstudija, Novi Sad, VladimiraPerićaValtera 4, telefon: 021/485-4021, e-mail: eminaelez@yahoo.com.

Opravdanje za upotrebu prvostepene i drugostepene stohastičke dominacije u ekonomskoj praksi je blisko intuitivnom shvatanju preferencija investitora, tako „posmatrajući skup svih neopadajućih funkcija korisnosti, što implicira da investitor preferira veću zaradu, dolazimo do koncepta prvostepene stohastičke dominacije, a uvodeći pretpostavku da investitor ujedno ima i odbojnost ka riziku, tada posmatramo samo one funkcije korisnosti koje su neopadajuće i konkavne. Na ovaj način dolazimo do koncepta drugostepene stohastičke dominacije.“ (Lončar, 2011a:158).

Prvostepena stohastička dominacija se koristi pri definisanju VaR mere rizika, dok je drugostepena stohastička dominacija osnova za definisanje različitih mera rizika, poput –TVaR odnosno CVaR (Rockafellar, Uryasev, 2000), srednjeg apsolutnog odstupanja od kvantila i odsečka Đinijeve srednje razlike (Ogryczak, Ruszczynski, 2002), čiji je kratak prikaz dat u: (Lončar, 2011b).

Trećestepenu stohastičku dominaciju je uveo Whitmore 1970. godine, on naglašava da „jačina trećestepene stohastičke dominacije prevazilazi jačinu drugostepene stohastičke dominacije, ali da ipak ima situacija u praksi u kojima se preferencije između dva neizvesna ishoda ne mogu utvrditi ovim uslovom“ (Whitmore 1970:458). Trećestepena stohastička dominacija je, između ostalog, našla svoju primenu u modelima očekivanje-rizik (Gotoh, Konno, 2000), kao i u analizi efikasnosti investicionih fondova (Lozano, Gutiérrez: 2008).

Trećestepena stohastička dominacija i preferencija ka asimetričnosti

Trećestepena stohastička dominacija, pored uslova za funkciju korisnosti U, koji su postavljeni u pristupu drugostepene stohastičke dominacije ($U' \geq 0, U'' \leq 0$) postavlja i uslov nenegativnosti trećeg izvoda funkcije korisnosti $U''' \geq 0$. Ovaj uslov je u tesnoj vezi sa asimetričnošću distribucije prinosa i najjednostavnije se objašnjava pomoću Tejlorovog razvoja funkcije korisnosti u okolini očekivanja slučajne promenljive prinosa *X*, tj. u okolini $E(X)$:

$$U(X)=U(E(X))+U'(E(X))(X-E(X))+\frac{U''(E(X))}{2!}(X-E(X))^2+\frac{U'''(E(X))}{3!}(X-E(X))^3+\dots$$

Sada, određivanjem očekivane vrednosti i leve i desne strane gornje jednakosti dobijamo:

$$E(U(X))=U(E(X))+U'(E(X))E((X-E(X)))+$$
$$+\frac{U''(E(X))}{2!}E\left((X-E(X))^2\right)+\frac{U'''(E(X))}{3!}E\left((X-E(X))^3\right)+\dots$$

Budući da je prvi centralni momenat jednak nuli, tj. $E\left(\left(X-E(X)\right)\right)=0$, a da su $\left(X-E(X)\right)^2$ i $\left(X-E(X)\right)^3$ drugi i treći centralni momentiredom, tj.:

$$\sigma_X^2=\left(X-E(X)\right)^2 \text{ i } \mu_3=\left(X-E(X)\right)^3,$$

dobijamo sledeću jednakost:

$$E\left(U(X)\right)=U\left(E(X)\right)+\frac{U''\left(E(X)\right)}{2!}\sigma_X^2+\frac{U'''\left(E(X)\right)}{3!}\mu_3+\ldots$$

Kako se asimetrija distribucije prinosa meri trećim centralnim momentom[1] (Bodie, Kane, Marcus, 2001), jasno je da „ako su ostali faktori konstantni, onda veća varijansa implicira nižu očekivanu korisnost za investitora sa averzijom prema riziku (jer je $U''<0$), a što je veća pozitivna asimetrija, veća je očekivana korisnost, dok god je $U'''>0$" (Levy, 2006:98).

Friedman i Savage objašnjavaju preferencije investitora na primeru sklonosti ka igranju lutrije i osiguravanju kuće (Friedman, Savage, 1948). Heyer koristi pojam*preferencija ka asimetričnosti*, odnosno *averzija prema propasti* i daje uobičajeno predstavljanje ovog pojma kao volje individue da igra lutriju, tj. da prihvati mali, skoro siguran gubitak u zamenu za malu verovatnoću dobijanja ekstremno visokog prinosa. Odnosno, neprihvatanje malog, skoro sigurnog dobitka, u zamenu za malu mogućnost propasti (Heyer, 2001:98).

Trećestepena stohastička dominacija

U nastavku navodimo definiciju trećestepene stohastičke dominacije, koja predstavlja specijalan slučaj uopštenja stohastičke dominacije *k*-tog reda, koja je prikazana u: (Shapiro, Datcheva, Ruszczynski, 2009:91) za *k*=3.

Definicija 1. *Slaba relacijatrećestepene stohastičke dominacije,* u oznaci $\succeq_{TSD}$, definiše se sa:

$$X\succeq_{TSD}Y \Leftrightarrow F_X^{(3)}(\eta)\le F_Y^{(3)}(\eta) \quad \text{za sve } \eta\in\mathbb{R},$$

gde je $F_X^{(3)}$ dato sa:

$$F_X^{(3)}(\eta)=\int_{-\infty}^{\eta}F_X^{(2)}(\xi)\,d\xi \quad \text{za} \quad \eta\in\mathbb{R},$$

pri čemu je:

---

[1]Koeficijentasimetričnosti $\alpha_3=\mu_3\sigma_X^{-\frac{3}{2}}$ predstavljanormalizovanicentralnimomenattrećegreda, samimtimjasno je da važi $\operatorname{sgn}(\alpha_3)=\operatorname{sgn}(\mu_3)$.

$$F_X^{(2)}(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} F_X(\xi)\,d\xi \quad \text{za} \quad \eta \in \mathbb{R}$$

i F_X je funkcija raspodela verovatnoća slučajne promenljive *X*.

$$F_X(\eta) = P(X \le \eta) \text{ za } \eta \in \mathbb{R} .$$

Dakle, jasno je da važi:

$$F_X^{(3)}(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} \int_{-\infty}^{\xi} F_X(\varsigma)\,d\varsigma\,d\xi \quad \text{za} \quad \eta \in \mathbb{R} .$$

Odgovarajuća *stroga relacija trećestepene stohastičke dominacije* $\succ_{TSD}$ definiše se na sledeći način:

Definicija 2. Neka su *X* i *Y* slučajne promenljive. Kažemo da *X* dominira *Y* po pravilu trećestepene stohastičke dominacije u oznaci $X \succ_{TSD} Y$, ako i samo ako je:

$$F_X^{(3)}(\eta) \le F_Y^{(3)}(\eta) \quad \text{za sve } \eta \in \mathbb{R}$$

i za neko $\eta_0 \in \mathbb{R}$ važi $F_X^{(3)}(\eta_0) < F_Y^{(3)}(\eta_o)$.

Definicija 2 se razlikuje od one koju daje Levy u svojim radovima iz 1992. i 1998. (Levy, 1992; Levy, 1998) s obzirom na to da Schmid u svom radu iz 2005. dokazuje da je drugi uslov koji postavlja Levy za trećestepenu stohastičku dominaciju suvišan, budući da proizilazi iz prvog uslova (Schmid: 2005). Ipak u algoritmu ćemo proveravati i taj uslov.

Lako se dokazuje da iz prvostepene (FSD), odnosno drugostepene stohastičke dominacije (SSD), sledi trećestepena stohastička dominacija (TSD), tako da su FSD i SSD u stvari dovoljni uslovi za postojanje TSD, a u nastavku navodimo dve teoreme koje daju neke od potrebnih uslova za TSD:

Teorema1. (Schmidt, 2005): ako $X \succeq_{TSD} Y$, onda $E(X) \ge E(Y)$.

Teorema2. (Levy, 2006:120):ako $X \succeq_{TSD} Y$, onda $\min(F_X(\eta)) \ge \min(F_Y(\eta))$.

TSD algoritam

U ovom delu predstavljamo opis i teorijsko zasnivanje algoritma za trećestepenu stohastičku dominaciju tzv. TSD algoritam (videti u: Levy, 2006:183).

Pretpostavimo da su za slučajnu promenljivu stope prinosa *X* njene empirijske realizacije date sa:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

pretpostavljamo, dalje, da je svaka od *n* realizacija stope prinosa x_i jednako verovatna, odnosno da važi:

$$p_i = \frac{1}{n},\ i = 1,...,n.$$

Pre nego što definišemo funkcije F_X, $F_X^{(2)}$, $F_X^{(3)}$ uvodimo oznake:

$$F_X^{(2)}(x_k - 0) = \lim_{\eta \to x_k - 0} F_X^{(2)}(\eta) \text{ i } F_X^{(3)}(x_k - 0) = \lim_{\eta \to x_k - 0} F_X^{(3)}(\eta).$$

Počinjemo sa definicijom funkcije raspodela verovatnoća F_X :

$$F_X(\eta) = \begin{cases} 0, & \eta < x_1 \\ \frac{k}{n}, & x_k \le \eta < x_{k+1}, \quad k = 1,...,n-1, \\ 1, & x_n \le x \end{cases}$$

zatim definišemo funkciju $F_X^{(2)}$:

$$F_X^{(2)}(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} F_X(\xi)\,d\xi = \begin{cases} 0, & \eta < x_1 \\ \frac{1}{n}(\eta - x_1) & x_1 \le \eta < x_2 \\ F_X^{(2)}(x_k - 0) + \frac{k}{n}(\eta - x_k) & x_k \le \eta < x_{k+1}, \quad k = 2,...,n-1 \\ F_X^{(2)}(x_n - 0) + \eta & x_n \le \eta \end{cases},$$

i na kraju funkciju $F_X^{(3)}$:

$$F_X^{(3)}(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} F_X^{(2)}(\xi)\,d\xi = \begin{cases} 0, & \eta < x_1 \\ \frac{1}{2n}(\eta - x_1)^2, & x_1 \le \eta < x_2 \\ F_X^{(3)}(x_k - 0) + F_X^{(2)}(x_k - 0)(\eta - x_k) + \frac{k}{2n}(\eta - x_k)^2, & x_k \le \eta < x_{k+1}, \ k = 2,...,n-1 \\ F_X^{(3)}(x_n - 0) + F_X^{(2)}(x_k - 0)(\eta - x_n) + \frac{(\eta - x_n)^2}{2}, & x_n \le \eta \end{cases}$$

.

Za drugu slučajnu promenljivu prinosa *Y*, čije ćemo empirijske realizacije označiti sa $y_1, y_2, ..., y_n$, funkcije F_Y, $F_Y^{(2)}$, $F_Y^{(3)}$ određujemo analogno.

Zatim formiramo zajedničku mrežu $z_1, z_2, ..., z_{2n}$ za realizacije *X* i *Y*, tj. za $z_1, z_2, ..., z_{2n}$ važi da za svako z_k $z_k = x_i$ za neko *i*, ili $z_k = y_j$ za neko *j* i sortiramo njene vrednosti, tj. važi: $z_1 \le z_2 \le ... \le z_{2n}$.

Jasno je da onda za svako $k=1,\ldots,2n-1$ važi $[z_k,z_{k+1}]\subseteq[x_i,x_{i+1}]$ za neko i i $[z_k,z_{k+1}]\subseteq[y_j,y_{j+1}]$ za neko *j*. Samim tim sve funkcije F_X, $F_X^{(2)}$, $F_X^{(3)}$ i F_Y, $F_Y^{(2)}$, $F_Y^{(3)}$ su definisane nad svakim intervalom $[z_k,z_{k+1}]$ restrikcijom funkcije sa $[x_i,x_{i+1}]$,odnosno $[y_j,y_{j+1}]$ na $[z_k,z_{k+1}]$.

Na kraju, uvodimo funkciju $H(\eta)=F_Y^{(3)}(\eta)-F_X^{(3)}(\eta)$. Kako su funkcije $F_X^{(3)}$ i $F_Y^{(3)}$ kvadratni polinomi, onda je funkcija H u kvadratni polinom, što ćemo i videti u nastavku. Dakle, neka je $[z_k,z_{k+1}]\subseteq[x_i,x_{i+1}]$ za neko i i $[z_k,z_{k+1}]\subseteq[y_j,y_{j+1}]$, tada je za $z_k\le\eta\le z_{k+1}$:

$$
\begin{aligned}
H(\eta) &= F_Y^{(3)}(\eta)-F_X^{(3)}(\eta)\\
&=\left(F_Y^{(3)}(y_j-0)+F_Y^{(2)}(y_j-0)(\eta-y_j)+\frac{j}{2n}(\eta-y_j)^2\right)\\
&\qquad-\left(F_X^{(3)}(x_i-0)+F_X^{(2)}(x_i-0)(\eta-x_i)+\frac{i}{2n}(\eta-x_k)^2\right)\\
&=\underbrace{\left(F_Y^{(3)}(y_j-0)-F_X^{(3)}(x_i-0)-F_Y^{(2)}(y_j-0)y_j+F_X^{(2)}(x_i-0)x_i+\left(\frac{j}{2n}y_j^2-\frac{i}{2n}x_i^2\right)\right)}_{=c}+\\
&\qquad+\underbrace{\left(F_Y^{(2)}(y_j-0)-F_X^{(2)}(x_i-0)+\frac{i}{n}x_i-\frac{j}{n}y_j\right)}_{=b}\eta+\underbrace{\frac{j-i}{2n}}_{=a}\eta^2
\end{aligned}
$$

,

pri čemu se transformacijom izraza za b dobija:

$$b=\frac{1}{n}\left(\sum_{l=1}^{i}x_l-\sum_{l=1}^{j}y_l\right).$$

Prema tome $H(\eta)\ge 0$ za svako $z_k\le\eta\le z_{k+1}$, ako i samo ako je $H(z_k)\ge 0, H(z_{k+1})\ge 0$ i

$$
\begin{aligned}
&\left(H(z_k)\ge 0\wedge H(z_{k+1})\ge 0\right)\wedge\\
&\quad\wedge\left(\left(H'(z_k)\ge 0\right)\vee\left(H'(z_k)<0\wedge H'(z_{k+1})\le 0\right)\vee\left(H'(z_k)<0\wedge H'(z_{k+1})\ge 0\wedge H\left(-\frac{b}{2a}\right)\ge 0\right)\right)
\end{aligned}
$$

,

što je osnova za formulaciju sledećeg algoritma. Levy naglašava da je svaki TSD algoritam, koji vrši proveru TSD samo u tačkama skoka verovatnoća, neispravan, jer se zanemaruje posmatranje unutrašnjih tačaka u kojima se može desiti da je $H(\eta)<0$, tj. da prikaže postojanje relacije TSD tamo gde je suštinski nema, objašnjavajući to na primeru dve distribucije (videti: Levy, 2006:189), paon stoga predlaže modifikaciju svog ranije objavljenog algoritma[2]. U skladu sa potrebnim uslovom za $X \succeq_{TSD} Y$ u algoritmu će se proveravati i $E(X) \geq E(Y)$.

ALGORITAM:

1. Sortiramo realizacije *X* i *Y*.
2. Ako je $\min(F_X) < \min(F_Y)$, to znači da $X \not\succ_{TSD} Y$, pa ćemo im zameniti imena, dakle važiće $Y \not\succ_{TSD} X$, ostaje da se proveri da $X \succ_{TSD} Y$.
3. Izračunavamo vrednosti funkcija $F_X^{(s)}(x_i), i=1,...,n$, $F_Y^{(s)}(y_j), i=j,...,n$, s=1,2.
4. Sortiramo zajedničku mrežu $z_1 \leq z_2 \leq ... \leq z_{2n}$.
5. Odredimo $H(z_k)$, $k=1,...,2n$.
6. Ako su svi $H(z_k) \geq 0$, $k=1,...,2n$, prelazimo na korak 7, ako nisu to znači da $X \not\succ_{TSD} Y$ i $Y \not\succ_{TSD} X$.
7. Određujemo sve $H'(z_k) = F_Y^{(2)}(z_k) - F_x^{(2)}(z_k)$, ako su svi $H'(z_k) \geq 0$ i postoji bar jedna striktna nejednakost i važi $E(X) \geq E(Y)$, tada $X \succ_{TSD} Y$, ako za neko $k \leq 2n-1$ $H'(z_k) < 0$, onda proveravamo znak $H'(z_{k+1})$.
8. $H'(z_{k+1}) \leq 0$, vrši se proveravanje za naredni interval, ako nije prelazimo na korak 9.
9. $H'(z_{k+1}) > 0$, proveravamo da li je $H\left(-\frac{b}{2a}\right) \geq 0$, $a = \frac{j-i}{2n} \neq 0$, $b = \frac{1}{n}\left(\sum_{l=1}^{i} x_l - \sum_{l=1}^{j} y_l\right)$, ako je zadovoljeno nastavljamo sa proverom narednog intervala, a ako nije to znači da $X \not\succ_{TSD} Y$ i $Y \not\succ_{TSD} X$.

Numerički rezultati

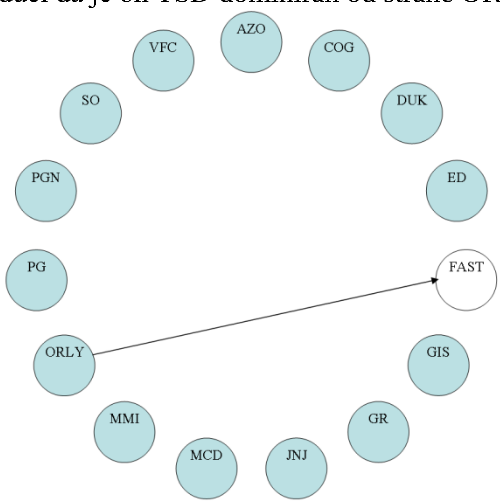
U ovom radu posmatrali smo dnevne prilagođene cene akcija na zatvaranju, koje su komponente indeksa S&P500 u periodu od 23. maja 2011. do 18. novembra 2011. Tri akcije, čiji su tiker simboli FO, MI, XYL, nisu uzete u obzir zbog nedovoljnog broja istorijskih podataka, time dopustivi skup broji 497 akcija. Svi podaci o cenama su preuzeti sa sajta:http://finance.yahoo.com/.

[2] Levy, H., Leshno, M., Hecket, Y,.*Third degree stochastic dominance: An Algorithm and Empirical Study*, working paper, Jerusalem, Israel, Hebrew University.

Pri utvrđivanju TSD relacija korišćen je gore navedeni algoritam. Svi podaci su obrađeni programskim paketom *MATLAB*.

Kako je SSD dovoljan uslov za TSD dominaciju, jasno je da je TSD-efikasni skup podskup SSD-efikasnog skupa, samim tim postigla se ušteda procesorskog vremena pri izvršavanju programa za TSD algoritam.

Dakle, posmatrali smo skup investicija sa tiker simbolima: AZO, COG, DUK, ED, FAST, GIS, GR, JNJ, MCD, MMI, ORLY, PG, PGN, SO, VFC (Lončar, 2011a:163), nakon primene TSD algoritma, dobijamo TSD relacije između 15 navedenih investicija (Slika 1), tada TSD-efikasni skup čine sve investicije iz SSD-efikasnog skupa isključujući FAST, budući da je on TSD dominiran od strane ORLY.



Slika 1. Dijagram relacije $\succ_{TSD}$ u skupu SSD-efikasnih investicija

Zaključak

Kao što smo videli, primenom algoritma za utvrđivanje FSD dominacije, FSD-efikasni skup čini 98% dopustivog skupa, a nakon primene SSD algoritma, SSD-efikasni skup čini 3% dopustivog skupa (Lončar, 2011a:162–163). Nakon primene TSD algoritma efikasni skup čini 2,82% dopustivog skupa. Dakle, dodavanjem uslova za funkciju korisnosti, da njen treći izvod bude nenegativan, u ovom slučaju se dobija smanjenje efikasnog skupa, čime se olakšava izbor investitoru koji preferira više prinose, ima averziju prema riziku i sklonost ka pozitivnoj asimetriji.

Literatura

[1] Bodie, Z., Kane, A., Marcus, A., (2001) *Investments*, New York, McGraw-Hill.

[2] Friedman, M., Savage, L. J., (1948) *The Utility Analysis of Choices Involving Risk*, “The Journal of Political Economy”, Vol. 56, Issue 4, 279–304.

[3] Gotoh, J., Konno, H., (2000) *Third Degree Stochastic Dominance and Mean-Risk Analysis*, Managemen Science, Vol. 46, No. 2, pp. 289–301.

[4] Heyer, D., (2001) *Stochastic Dominance: ATool for Evaluating Reinsurance Alternatives*, “Casualty Actuarial Society Forum Casualty Actuarial Society”, Arlington, Virginia, Summer 2001,pp. 95–118, dostupno na: http://www.casact.org/pubs/forum/01sforum/01sf095.pdf, pristup dokumentu ostvaren: 19.11.2011.

[5] Levy, H., (1992) *Stochastic Dominance and expected utility: survey and analysis*, “Management Science“,Vol. 38, No. 4, pp. 555–593.

[6] Levy, H., (1998) *Stochastic Dominance: Investment Decision Making Under Uncertainty*, Dordrecht,Kluwer.

[7] Levy, H., (2006) *Stochastic dominance:Investment Decision Making Under Uncertainty* (second edition), Springer.

[8] Lončar, S., (2011a) *Primena prvostepene i drugostepene stohastičke dominacije u rangiranju investicija*,„Škola biznisa“, br. 3/2011, Novi Sad, Visoka poslovna škola strukovnih studija.

[9] Lončar, S., (2011b) *Dualne mere rizika*,„Škola biznisa“, br. 4/2011, Novi Sad, Visoka poslovna škola strukovnih studija.

[10] Lozano, S., Gutiérrez E., (2008) *TSD-Consistent Performance Assessment of Mutual Funds*, “The Journal of the Operational Research Society”, Vol. 59, No. 10, pp. 1352–1362.

[11] Ogryczak, W., Ruszuczynski A., (2002) *Dual Stochastic Dominance and related mean-risk models*, “SIAM Journal on Optimization”,Vol. 13, No. 1, pp. 60–78.

[12] Schmid, F., (2005) *A note on third degree stochastic dominance*, “OR Spectrum”, Vol. 27, No. 4, pp. 653–655.

[13] Shapiro, A., Datcheva, D., Ruszczynski,A., (2009) *Lectures on stochastic programming: modeling and theory*,SIAM-Society for Industrial and Applied Mathematics.

[14] Whitmore, G.A., (1970) *Third Degree Stochastic Dominanc*e,“American Economic Review”,Vol. 60, No. 3, pp. 457–459.

[15] http://finance.yahoo.com/, pristup sajtu ostvaren: 19.11.2011.

Primljeno: 11.06.2012.
Odobreno: 20.06.2012.