

Ivan Pavkov*
Miloš Japundžić**

ULOGA FAZI MATEMATIKE U EKONOMSKOM ODLUČIVANJU

Sažetak: Tradicionalno, ekonomski modeli su zasnovani na klasičnoj matematici utemeljenoj na aristotelovskoj dvoelementnoj logici. Sa pojavom fazi matematike, kao sredstva za modeliranje pojava koje su prožete neodređenošću i nekompletnošću, stvara se mnogo adekvatniji okvir za modeliranje ekonomskih pojava. Novi koncept je rezultirao pojavom približnog rezonovanja i fazi sistema kontrole koji su se pokazali kao efikasno sredstvo pri donošenju odluka u uslovima neodređenosti.

Ključne reči: ekonomski model, fazi matematika, približno rezonovanje, fazi sistemi kontrole.

USING FUZZY MATHEMATICS FOR DECISION MAKING IN ECONOMICS

Abstract: Traditionally, economic models are based on classical mathematics and Aristotelian two-valued logic. Nevertheless, fuzzy mathematics, as a tool for modeling some types of uncertainties and incomplete phenomena, is a more appropriate framework for modeling in economics. New approach has resulted in approximate reasoning and fuzzy control systems, which proved to be an efficient tool for decision making in fuzzy environment.

Key words: economic model, fuzzy mathematics, approximate reasoning, fuzzy control systems.

Uloga fazi skupa u modeliranju neodređenosti

Tradicionalno, ekonomski modeli su zasnovani na klasičnoj matematici utemeljenoj na aristotelovskoj dvoelementnoj logici. U aristotelovskom konceptu, određeni element ili pripada ili ne pripada nekom skupu, treće mogućnosti nema. Međutim, ovakav egzaktan pristup nepodesan je za modeliranje pojava koje su prožete neodređenošću. Poznat je Wang-ov paradoks: *Ako je x mali broj, onda je to $i + x + 1$. Ako je $x + 1$ mali broj, onda je to $i + (x + 1) + 1$. Tako dolazimo do zaključka da je i pet biliona mali broj,*

*Ivan Pavkov, saradnik u nastavi, Visoka poslovna škola strukovnih studija, Novi Sad.

**Mr Miloš Japundžić, asistent, Visoka poslovna škola strukovnih studija, Novi Sad.

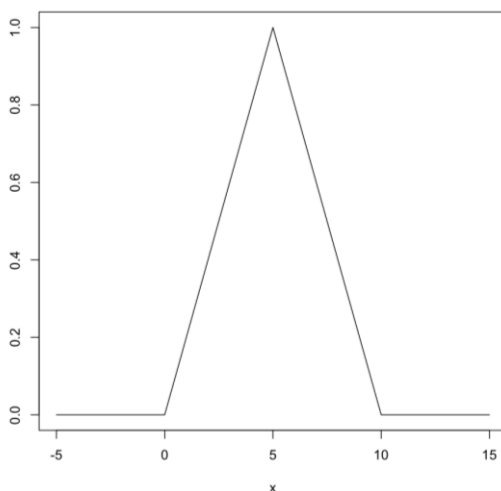
kao i beskonačnost. Rešenje koje je mogla da ponudi klasična matematika bilo bi da se odabere proizvoljna, ali jasna granica između skupa malih i velikih brojeva.

Pojam fazi skupa, potpuno suprotan pojmu tradicionalnog aristotelovskog skupa, uvodi Zadeh 1965. godine. Ovim konceptom se dopušta nijansiranje stepena pripadnosti elementa određenom skupu, tj. svakom elementu pridružujemo realan broj kao indikator stepena pripadanja tog elementa skupu. Drugim rečima, fazi skup definišemo na sledeći način:

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\},$$

pri čemu je funkcija pripadanja $\mu_A(x)$, $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$, gde je X univerzalni skup elemenata. Jasno, ako element ne pripada skupu A – vrednost funkcije pripadanja pridružene tom elementu je 0, a ako pripada – vrednost je 1. Međutim, za sve druge vrednosti funkcije pripadanja različite od 0 i 1 postiže se nijansiranje stepena pripadanja određenog elementa fazi skupu.

Posmatrajmo fazi skup realnih brojeva bliskih broju 5, čija je funkcija pripadanja prikazana na Slici 1. Jasno, broj 5 pripada ovom fazi skupu sa funkcijom pripadanja 1, a svi drugi brojevi iz intervala (0,10) imaju funkciju pripadanja između 0 i 1. Funkcija pripadanja je simetrična u odnosu na pravu $x=5$, što je logično jer, recimo, brojeve 4 i 6 smatramo jednako bliskim broju 5. Brojevi izvan intervala (0,10) smatraju se nedvosmisleno udaljenim od broja 5 i dodeljuje im se 0 kao vrednost funkcije pripadanja.



Slika 1. Funkcija pripadanja fazi skupa realnih brojeva bliskih broju 5

Izvor: <https://wiki.umn.edu>.

Fazi skupovi, ili rasplinuti skupovi, su učinili mogućim modeliranje različitih tipova neodređenosti, različite od slučajne neodređenosti. Naime, fazi konceptom neodređenost se inkorporira u samu definiciju modela, što model čini realnijim, a samim tim i pogodnim okvirom za ljudsko rezonovanje.

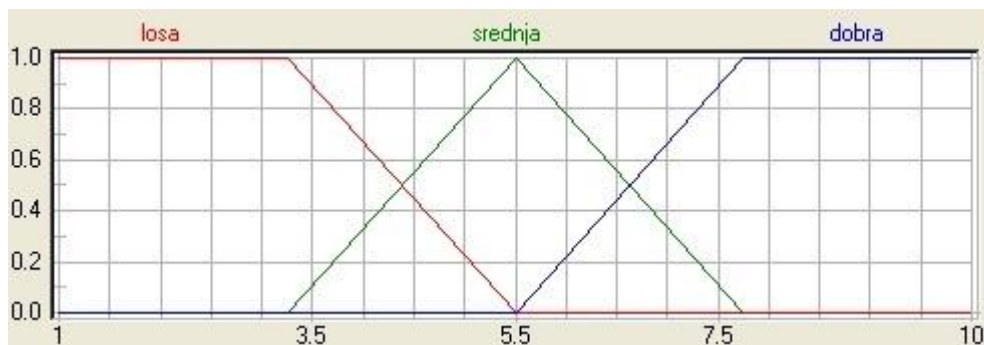
Fazi rešenje Wang-ovog paradoksa bilo bi da se odredi gornja granica g do koje se brojevi smatraju nedvosmisleno malim i ti brojevi bi pripadali skupu malih brojeva sa funkcijom pripadanja 1, a skupu velikih brojeva sa funkcijom pripadanja 0. Dalje bi, za svaki element veći od g , tj. $g+1$, $(g+1)+1$ itd., funkcija pripadanja skupu malih brojeva linearno opadala, a funkcija pripadanja skupu velikih brojeva linearno rasla i dostizala vrednost 1 za najmanji prirodan broj koji bismo smatrali nedvosmisleno velikim brojem. Ovakvim fazi pristupom, umesto oštre klasične granice, uspostavljamo „prelazni pojas“ između skupa malih i velikih brojeva. Metaforički rečeno, dopuštamo svaku nijansu sive između crne i bele boje.

Ekonomске odluke se donose u promenljivom okruženju, gde je neodređenost uslovljena nepoznavanjem sistema u celini. Nemoguće je sa sigurnošću izdvojiti konačan skup pojava koje utiču na datu pojavu, a i za one pojave koje znamo da imaju uticaj često smo suočeni sa nemogućnošću poznavanja njenih vrednosti u svakom trenutku. Dakle, fazi priroda ekonomskih sistema ogleda se kako u delimičnom nepoznavanju celine sistema, tako i u nekompletnosti dostupnih informacija. Značajnu ulogu u ponašanju ovih sistema ima ljudska psihologija, što dodatno usložnjava sistem koji se ne može uspešno modelirati metodama klasične matematike. Sa pojavom fazi matematike, kao sredstva za modeliranje pojava koje su prožete neodređenošću i nekompletnošću, stvara se mnogo adekvatniji okvir za ekonomska istraživanja postizanjem zadovoljavajućeg kompromisa između dostupnih informacija i stepena neodređenosti koji dopuštamo. Pod pojmom fazi neodređenosti podrazumevamo neodređenost u smislu nepoznavanja sistema kao celine i potrebe za nijansiranim odgovorom donosioca odluke. Drugim rečima, fazi neodređenost se suštinski razlikuje od neodređenosti u smislu teorije verovatnoće, gde neodređenost potiče od slučajne prirode modeliranih procesa.

Uprkos ogromnom tehničkom napretku u poslednjih dvadesetak godina, mnogi industrijski i organizacioni procesi su i dalje kontrolisani od strane iskusnih profesionalaca ili menadžera koji donose odluke u promenljivom okruženju, oslanjajući se na sopstvenu intuiciju i iskustvo. Zadatak fazi logike je da ponudi skup fazi zakona jednostavne formulacije, bliskih načinu ljudskog rezonovanja, koji objašnjavaju okruženje. Oslanjanjem na ove zakone, donosioci odluka smanjuju mogućnost greške usled uticaja okoline ili subjektivne pogrešne procene.

Važan koncept koji se koristi u brojnim primenama je koncept lingvističke varijable. Lingvistička varijabla je uređena petorka $(x, T(x), X, G, M)$, gde je x ime varijable, $T(x)$ skup lingvističkih terma, tj. vrednosti lingvističke varijable, X univerzalni skup, G pravilo za generisanje lingvističkih terma, M pravilo koje svakom lingvističkom termu t iz skupa T dodeljuje značenje $M(t)$ koje je, u stvari, fazi broj na X .

Posmatrajmo lingvističku varijablu čiji je naziv „kvalitet uprave“. Domen varijable (osa x) definisan je skalom kvalitativnih vrednosti od 1 do 10 koje služe za ocenjivanje kvaliteta uprave. Osa y meri stepen u kome je, za određenu ocenu, uprava loša, srednja ili dobra. „Loša“, „srednja“ i „dobra“ su lingvistički termini varijable „kvalitet uprave“, čije značenje je prikazano na Slici 2. Na primer, uz ocenu 4 uprava je 31,5% srednja i 68,5% loša.



Slika 2. Fazi skupovi pridruženi termima lingvističke varijable „kvalitet uprave“

Izvor: www.ruledit.com.

Definisanje broja lingvističkih terma na koje se opseg deli, kao i definisanje fazi skupova koji se pridružuju lingvističkim termima su zadaci za eksperte, koje treba obaviti u skladu sa konkretnom pojavom koja se modelira.

Približno zaključivanje u uslovima neodređenosti

U tradicionalnoj logici, koja predstavlja osnovu klasične matematike, zaključivanje se vrši po dva osnovna zakona, modus ponensu i modus tolensu. Na primer, zaključivanje po modus ponensu (MP) odvija se po shemi:

Premisa 1: x je A

Premisa 2: AKO x je A ONDA y je B ,

Zaključak: y je B

gde su A i B klasični skupovi. Drugim rečima, modus ponens daje logičku osnovu da u istim situacijama isto reagujemo.

Međutim, nijedna ekonomska situacija nije u potpunosti podudarna nekoj istorijskoj, što nameće potrebu za definisanjem približnog rezonovanja, a to je u okvirima tradicionalne logike nemoguće. Za potrebe definisanja nove logičke strukture, tradicionalni modus ponens (MP) se proširuje na generalizovani modus ponens (GMP) sa sledećom shemom:

Premisa 1: x je A_1

Premisa 2: AKO x je A ONDA y je B ,

Zaključak: y je B_1

gde su A , A_1 , B i B_1 fazi skupovi, pri čemu A i A_1 nisu obavezno jednaki fazi skupovi, kao ni B i B_1 , tj. njihove funkcije pripadanja nisu obavezno iste, ali su odstupanja relativno mala. Jasno, x i y , u slučaju GMP-a, su lingvističke varijable, A , A_1 termi lingvističke varijable x , a B i B_1 termi lingvističke varijable y . Naravno, što je stepen razlikovanja funkcija pripadanja skupova A i A_1 , kao i B i B_1 manji, približno zaključivanje bliže je klasičnom. Generalizovani modus ponens daje logičku osnovu da u sličnim situacijama slično reagujemo. Fazi koncept zaključivanja po sličnosti predstavlja osnovu za približno rezonovanje u brojnim ekonomskim modelima prožetim neodređenošću.

Fazi sistemi kontrole

Fazi sistem kontrole podrazumeva zaokružen sistem kontrole pojava prožetih neodređenošću, ne obavezno ekonomskih. Shema ovog sistema prikazana je ispod.

Numerički ulaz → Fazifikator → Fazi ulaz → Skup fazi zakona →
→ Fazi izlaz → Defazifikator → Numerički izlaz

Numeričke vrednosti ekonomskih veličina se, najpre, fazifikuju. Zatim, tako fazifikovane vrednosti, tj. lingvističke varijable sa pridruženim termom, ulaze u skup fazi zakona i aktiviraju jedan od njih. Nakon toga se vrši zaključivanje po GMP-u i kao rezultat toga dobija se fazi izlaz, druga lingvistička varijabla sa pridruženim odgovarajućim termom. Iz ovog fazi izlaza moguće je, ukoliko je potrebno, izvršiti ekstrakciju numeričkog odgovora.

Posmatrajmo najjednostavniji, ali ilustrativan, primer korišćenja fazi sistema kontrole. Pretpostavimo da neka osoba ima na raspolaganju svotu novca od 10.000 evra na određeni period i da želi da eventualno zaradi, u smislu dinarske protivvrednosti, tako da se odlučuje da li da konverziju izvrši na početku ili na kraju tog perioda. Jasno, odluka kada da se izvrši konverzija donosi se u odnosu na očekivani kurs dinara prema evru. Pretpostavimo da je srednji kurs evra na dan odluke 110, a 115 dinara za jedan evro projektovani srednji kurs na isteku tog perioda. Ovi podaci čine numerički ulaz sistema i nakon njihove fazifikacije dobijamo fazi ulaz očekivanog odnosa dinara prema evru – lingvističku varijablu „dinar prema evru“ kojoj je pridružen lingvistički term „slabi“. Ovakav fazi ulaz se prosleđuje u skup fazi zakona i aktivira samo jedan fazi zakon i to onaj zakon čiju premisu zadovoljava. Kompletan sistem fazi kontrole, u našem primeru, sastoji se od tri fazi zakona:

AKO dinar prema euru slabi ONDA konverziju izvršiti na kraju perioda
 AKO dinar prema euru jača ONDA konverziju izvršiti na početku perioda ,
 AKO dinar prema euru je stabilan ONDA konverziju ne vršiti

gde lingvistička varijabla „dinar prema evru“ ima tri lingvistička terma „slabi“, „jača“ i „stabilan“. Termu „stabilan“ pridružujemo fazi skup okoline broja 110. Naravno, rasplinitost fazi skupa na levo i na desno od 110 je uslovljena visinom troškova konverzije. Drugim rečima, za sitne oscilacije srednjeg kursa oko početne vrednosti se ne isplati vršiti konverziju, jer bi nakon obračuna menjačkih troškova dobijena količina novca bila manja nego da se konverzija u dinare izvršila u početnom trenutku.

Premisa iz našeg primera aktivira prvi zakon, koji povlači izlaz: konverziju izvršiti na kraju perioda. Primetimo da, u ovom slučaju, ne dobijamo fazi odgovor nego jasnu komandu.

U slučaju da se fazi zaključivanjem ne dobija komanda nego lingvistički term, kao što je kod fazi zakona tipa:

AKO je nezaposlenost relativno niska ONDA je prosečna plata relativno visoka ,
 moguće je izvršiti ekstrakciju numeričke vrednosti iz fazi odgovora. Postoje tehnike kojima se iz lingvističkog terma „relativno visoka“ lingvističke varijable „prosečna plata“ precizira numerička vrednost prosečne plate. U brojnim ekonomskim primenama ne postoji potreba za ekstrakcijom numeričkog odgovora, kao što je, na primer, kod različitih fazi sistema kontrole koji kontrolišu trgovanje na berzi, gde sistem nudi savet donosiocu odluke u formi komande kupovine, prodaje ili zadržavanja pozicije. Ovaj odgovor se, u nekim sistemima, nijansira tako da skup lingvističkih terma fazi varijable „akcija trejdera“ ima, recimo, sledeći oblik: {jako prodati, prodati, zadržati poziciju, kupiti, jako kupiti}.

Primetimo da, u prethodnom primeru, svaki put kada dinar prema evru slabi, izlazna komanda je da se konverzija izvrši na kraju perioda, tako da se može tumačiti da se zaključivanje vrši po klasičnom modus ponensu. Međutim, i u slučaju projektovanog kursa od 115 i, recimo 116 dinara za jedan evro, lingvistička varijabla „dinar prema evru“ poprima vrednost „slabi“ i vodi ka istoj komandi, tako da je zaključivanje svakako približno.

U gore navedenom primeru, postoje tri mogućnosti budućeg odnosa dinara prema evru koje su opisane pomoću tri lingvistička terma. U slučaju da na neku pojavu utiču, recimo, dve pojave, svaka opisana sa po tri lingvistička terma, kompletan fazi sistem kontrole imao bi $3 \cdot 3 = 9$ zakona, po jedan za svaku kombinaciju stanja ulaznih lingvističkih varijabli.

Fazi zakoni u manje složenim sistemima često se dobijaju od strane iskusnih eksperata. Međutim, za dobijanje fazi zakona u visoko nelinearnim složenim ekonomskim
 ŠKOLA BIZNISA

modelima sa zašumljenim podacima gde se najčešće očekuje nijansiran odgovor, koriste se neuronske mreže, koje imitiraju strukturu neurona u mozgu. Ova struktura sastoji se od neurona i veza među njima. Dostupni empirijski podaci obrađuju se na način da se ustanovi veza ulaznih i izlaznih neurona. Drugim rečima, neuronske mreže, u uslovima ovakvih nelinearnih modela, efikasno prepoznaju uzročno-posledične veze. Uprkos nemogućnosti da objasne ustanovljene veze, kada su dobro definisane, neuronske mreže sa velikim uspehom predviđaju izlaz za proizvoljan skup ulaznih podataka.

Zaključak

Nedostaci koje je ispoljila klasična matematika u modeliranju pojava koje sadrže elemente neodređenosti, prevaziđeni su pojavom fazi koncepta, gde se neodređenost unosi u samu definiciju modela. Novi pristup rezultirao je pojavom približnog rezonovanja po generalizovanom modus ponensu i fazi sistema kontrole, na koje se donosilac odluka oslanja u promenljivom i dinamičnom okruženju karakterističnom za ekonomske modele. Na taj način značajno se smanjuje mogućnost greške donosioca odluke usled subjektivne pogrešne procene.

Literatura

- [1] Anđelić, G., Đaković, V., (2010) *Osnove investicionog menadžmenta*, Novi Sad, FTN izdavaštvo.
- [2] Blaug, M., (1985) *Economic Theory in Retrospect*, Cambridge University Press.
- [3] Chick, V., Dow, S., (2001) *Formalism, Logic and Reality: A Keynesian Analysis*, "Cambridge Journal of Economics", Vol.25, pp.705–721.
- [4] Coates, J., (2007) *The Claims of Common Sense: Moore, Wittgenstein, Keynes and the Social Sciences*, Cambridge University Press.
- [5] Dummett, M., (1975) *Wang's Paradox*, "Synthese", Vol. 30, pp. 301–324.
- [6] Gradojević, N., (2002) *Non-linear exchange rate forecasting: the role of market microstructure variables*, doktorska teza, University of British Columbia.
- [7] Keynes, J.M., (1921) *A Treatise on Probability*, London, Macmillan.
- [8] Klir, G., (2002) *Uncertainty in Economics: The Heritage of G.L.S. Shackle*, "Fuzzy Economic Review", Vol.VII, no.2, pp.3–21.
- [9] McNeill, D., Freiberger P., (1993) *Fuzzy Logic*, New York etc., Simon & Schuster.
- [10] Останкова, Л.А., Попова, А.Ю., Шевченко, Н.Ю., (2011) *Повышение рискоустойчивости системы планирования*, „Škola biznisa“, broj 1, Novi Sad, Visoka poslovna škola strukovnih studija.

- [11] Ostankova, L., Shevchenko, N., (2011) *Account-taking of effect of micro- and macroenvironment on investment decision taking under the conditions of indefiniteness*, „Škola biznisa“, broj 2, Novi Sad, Visoka poslovna škola strukovnih studija.
- [12] Sheikhan, M., Movaghar, B., (2009) *Exchange Rate Prediction Using an Evolutionary Connectionist Model*, “World Applied Sciences Journal (Special Issue of Computer & IT)”, No. 7, pp. 8–16.
- [13] Tsoukalas, L.H., Uhrig, R.E., (1997) *Fuzzy and Neural Approaches in Engineering*, JohnWiley & Sons.
- [14] <https://wiki.umn.edu>.
- [15] <https://www.ruledit.com>.

Primljeno: 05.03.2012.

Odobreno: 01.06.2012.