INVESTIRANJE U HARTIJE OD VREDNOSTI

– Praktični zadaci –

**ZADATAK 1 – izračunavanje bete**

**Primer:** Stopa prinosa na bezrizične državne zapise iznosi 6%, stopa prinosa na S&P500 indeks iznosi 12%. Izračunati rizik preduzeća X i njegovu zahtevanu stopu prinosa na sopstveni kapital ukoliko su dati sledeći podaci o ostvarenim stopama prinosa:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Godina | Stopa prinosa preduzeća (RA) | Stopa prinosa S&P500 Indeksa (RM) |
|
| 1 | 0.3 | 0.15 |
| 2 | 0.2 | 0.25 |
| 3 | 0.35 | 0.3 |
| 4 | -0.1 | 0.1 |
| 5 | 0.55 | 0.7 |
| Zbir | 1.3 | 1.5 |
| Prosek | 0.26 | 0.3 |

**Rešenje:**

Za izračunavanje β neophodno je izračunati COV(RA, RM) i varijansu tržišnog portfolija.

β = 

Za njihovo izračunavanje je neophodno izračunati očekivani prinos za akcije E(RA) i tržišni portfolio predstavljen indeksom S&P500 E(RM), koji je prosek ostvarenih stopa prinosa u prošlosti:



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Godina | Stopa prinosa preduzeća (RA) | Stopa prinosa S&P500 Indeksa (RM) | RA-E(RA) | RM-E(RM) | Kovarijansa COV(RA, RM) | Izračunata varijansa  |
| 1 | 0.3 | 0.15 | 0.04 | -0.15 | -0,006 | 0,0225 |
| 2 | 0.2 | 0.25 | -0.06 | -0.05 | 0,003 | 0,0025 |
| 3 | 0.35 | 0.3 | 0.09 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | -0.1 | 0.1 | -0.36 | -0.2 | 0,072 | 0,04 |
| 5 | 0.55 | 0.7 | 0.29 | 0.4 | 0,116 | 0,16 |
| Zbir | 1.3 | 1.5 |   |   | 0,185 | 0,225 |
| Prosek | 0.26 | 0.3 |   |   | 0,037 | 0,045 |

Kovarijansu računamo na osnovu formule:



Varijansu tržišnog portfolija računamo:



Onda je: β = 

Izračunata beta iznosi 0,82, što znači da akcije datog preduzeća spadaju u defanzivne, odnosno da je njihov prinos manje osetljiv na kretanje prinosa tržišnog portfolija. Prema tome, zahtevana stopa prinosa na sopstveni kapital preduzeća iznosi:

re = rf + β(rm – rf) = 6 + 0,82 × ( 12 – 6 ) = 10,92%

**ZADATAK 2 – izračunavanje kovarijanse**

**Primer:** Posmatramo prinose dve kompanije A i B, u situaciji tri moguća ishoda kretanja privrede, kako sledi:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Verovatnoća Pi | Prinos kompanije A (RAi) | Prinos kompanije B (RBi) |
| Ekspanzija  | 0,3 | 20 | 3 |
| Normalan rast | 0,4 | 10 | 35 |
| Recesija | 0,3 | 0 | -5 |

Izračunajte koeficijent korelacije između dve akcije i protumačite ga.

**Rešenje:**

Kovarijansa se računa preko formule: 

Za lakši račun možemo koristiti tabelu u kojoj se računaju elementi potrebni za izračunavanje kovarijanse i koeficijenta korelacije:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Verovatnoća Pi | Prinos RA | Prinos RB | Odstupanje od očekivanog prinosaRA-E(RA) | Odstupanje od očekivanog prinosaRB-E(RB) | Kvadrat odstupanja od očekivanog prinosa(RA-E(RA) )2 | Kvadrat odstupanja od očekivanog prinosa(RB-E(RB) )2 | COV(RA,RB) |
| 0,3 | 20 | 3 | 10 | -10,4 | 100 | 108,16 | -31,2 |
| 0,4 | 10 | 35 | 0 | 21,6 | 0 | 466,56 | 0 |
| 0,3 | 0 | -5 | -10 | -18,4 | 100 | 338,56 | 55,2 |
| Σ |  |  |  |  | 60 | 320,64 | 24 |

Očekivani prinos akcije A i B:



COV (RA,RB)= [0,3 × 10 × (-10,4)] + [0,4 × 0 × 21,6] + [ 0,3 × (-10) ×(-18,4)] = -31,2 + 0 + 55,2 = 24

Varijanse su:

 = 100 × 0,3 + 0 × 0,4 + 100 × 0,3 = 60

= 108,16 × 0,3 + 466,56 × 0,4 + 338,56 × 0,3 = 32,45 + 186,62 + 101,57 = 320,64

Standardne devijacije instrumenata A i B su:

= 7,75

= 17,91

Koeficijent korelacije je:



Akcije dve kompanije su slabo korelisane, što znači da ih je poželjno imati u portfoliju u cilju diverzifikacije nesistemskog rizika jer rast vrednosti jedna akcije se ne odražava značajnije na rast vrednosti druge akcije i obrnuto.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Činjenice vezane za portfolio:**

1. Stopa prinosa portfolia je jednaka ponderisanom proseku pojedinačnih prinosa na hartije od vrednosti koje ulaze u portfolio, a ponderi su udeli pojedinačnih HoV u portfoliu.

To se računa prema: ; gde je prinos portfolia, i su prinosi pojedinačnih HoV (A i B), i i su ideli pojedinačnih HoV u portfoliu.

1. Varijansa portfolia je zbir ponderisanih varijansi HoV u portfoliu, ali uvećana za koeficijent korelacije dva instrumenta u portfoliu.

Varijansa portfolia se računa prema izrazu: ; gde je varijansa portfolia, i su standardne devijacije HoV (A i B), a je koeficijent korelacije između HoV u portfoliu (A i B).

Izraz može da se napiše i kao jer je , odnosno

1. Dokle god je koeficijent korelacije manji od jedan, mogućnosti za diverzifikaciju postoje, odnosno varijansa portfolio je manja nego ponderisani prosek pojedinačnih varijansi HoV koje ulaze u portfolio.

**ZADATAK 3 – izračunavanje varijanse portfolija kada se menja nivo korelacije**

**Primer:** Dokažite tvrdnju da je varijansa portfolia manja od varijanse ponderisanog proseka HoV koje čine portfolio ako je koeficijent korelacije manji od 1. Standardne devijacije i varijanse instrumenata A i B su: , , a koeficijenti korelacije između ta dva instrumenta su sledeća: a) 60%, b) 15%, c) 0%, d) 100%, e) -30%. Udeo instrumenta A u portfoli iznosi 45%, a instrumenta B 55%. U kom scenariu će varijansa portfolia biti najmanja?

**Rešenje:**

Osenčene vrednosti su koeficijenti korelacije i oni se menjaju u izrazu za .

= 0.00456 + 0.01092 + 2 × 0.00675 + 0.1045 × 0.6 = 0.023941

= 0.00456 + 0.01092 + 2 × 0.00675 + 0.1045 × 0.15 = 0.017593

= 0.00456 + 0.01092 + 2 × 0.00675 + 0.1045 × 0 = 0.015477

= 0.00456 + 0.01092 + 2 × 0.00675 + 0.1045 × 1 = 0.029584

= 0.00456 + 0.01092 + 2 × 0.00675 + 0.1045 × (-0.3) = 0.011244

Ako bi smo odvojeno posmatrali zbir ponderisanih proseka standardnih devijacija pojedinačnih instrumenata, onda bi standardna devijacija iznosila:

, što je povećanje ponderisane standarne devijacije od 2.2 u odnosu na primarni instrument A.

Međutim, ako bismo te instrumente posmatrali u okviru portfolia, tj. ako bi se uzimao u obzir i njihov međusobni odnos (koeficijent korelacije), onda je povećanje (smanjenje) standardne devijacije portfolia sledeće:

1. povećanje standarde devijacije portfolia u odnosu na primarni instrument A je 0.0047 (0.1547 – 15), odnosno učinak diverzifikacije je 2.2 – 0.0047 = 2.1953%
2. smanjenje standarde devijacije portfolia u odnosu na primarni instrument A je 0.0174 (0.1326 – 15), odnosno učinak diverzifikacije je 2.2 – (– 0.0174) = 2.2174%
3. smanjenje standarde devijacije portfolia u odnosu na primarni instrument A je 0.0256 (0.1244 – 15), odnosno učinak diverzifikacije je 2.2 – (– 0.0256) = 2.2256%
4. povećanje standarde devijacije portfolia u odnosu na primarni instrument A je 2.2 (0.15 – 0.172), odnosno učinak diverzifikacije je 2.2 – 2.2 = 0%. Drugim rečima, ovim proračunom je dokazano da mogućnost diverzifikacije ne postoji ako je korelacija savršeno pozitivna.
5. smanjenje standarde devijacije portfolia u odnosu na primarni instrument A je 0.044 (0.15 – 0.106), odnosno učinak diverzifikacije je 2.2 – (– 0.044) = 2.244%

**Zaključak:** Ovim zadatkom je dokazano da što je korelacija između dva instrumenta niža to je standardna devijacija portfolia niža, odnosno mogućnosti diverzifikacije su veće. Takođe, kada je korelacija negativna, efekat diverifikacije je još veći i to ze onda naziva hedžiranje, odnosno zaštita od rizika. Retki su instrumenti koj imaju negativnu korelaciju, a jedan dobar primer su akcije i obveznice. U slučaju kada je korelacija savršeno pozitivna, mogućnosti korelacije se svode na 0.

**ZADATAK 4 – ucrtavanje portfolija na grafikon, koji imaju različite nivoe korelacije**

Na bazi podataka iz prethodnog zadatka (zadatka 3) ucrtajte tačke različitih portfolija na grafikon, ako je prinos instrumenta A = 6%, a prinos instrumenta B = 8%. Udeli instrumenata A i B u portfoliju su isti kao i u zadatku 3, odnosno udeo instrumenta A u portfoliu iznosi 45%, a instrumenta B 55%. Prokomentarišite grafikon.

**Rešenje:**

Stopa prinosa portfolia ( je ista za sve varijante različitih korelacija, pošto je stopa prinosa jednaka ponderisanom proseku pojedinačnih prinosa na hartije od vrednosti koje ulaze u portfolio, odnosno koeficijent korelacije ne igra ulogu pri izračunavanju stope prinosa portfolija.



**Komentar:** Ucrtavanjem tačaka portfolia sa različitim korelacijama između instrumenata A i B, možemo zaključiti da što je korelacija manja između dva instrumenta to je tačka na grafikonu pomerena više ulevo. Drugim rečima, na ovaj način se vizuelno vidi da je rizik portfolia manji sa smanjenjem korelacija između dva instrumenta koji ulaze u taj portfolio. Pri tome, sve tačke se nalaze na istoj horizontalnoj liniji, jer se prinosi na razlikuju bez obzira koliki je koeficijent korelacije.

**ZADATAK 5 – izračunavanje varijanse portfolija kada je korelacija jednaka jedinici**

**Primer:** Izračunajte pod I) varijansu portfolija sa minimalnom varijansom, i pod II) odnos između prinosa i rizika ( tzv. Šarpov racio) ako su udeli instrumenta A u portfoliu: a) 25%, b) 47%, c) 63% i d) 94%, a prinosi instrumenata A i B su dati u sledećoj tabeli. Protumačite rezultate.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Verovatnoća Pi | Prinos kompanije A (RAi) | Prinos kompanije B (RBi) |
| Ekspanzija  | 0,3 | 4 | 7 |
| Normalan rast | 0,4 | 4.6 | 8.05 |
| Recesija | 0,3 | 3.38 | 6.44 |

Izračunajte koeficijent korelacije između dve akcije i protumačite ga.

**Rešenje:**

Kovarijansa se računa preko formule: 

Za lakši račun možemo koristiti tabelu u kojoj se računaju elementi potrebni za izračunavanje kovarijanse i koeficijenta korelacije:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Verovatnoća Pi | Prinos RA | Prinos RB | Odstupanje od očekivanog prinosaRA-E(RA) | Odstupanje od očekivanog prinosaRB-E(RB) | Kvadrat odstupanja od očekivanog prinosa(RA-E(RA) )2 | Kvadrat odstupanja od očekivanog prinosa(RB-E(RB) )2 | COV(RA,RB) |
| 0.3 | 4 | 6 | -0.1 | -0.15 | 0.01 | 0.0225 | 0.0045 |
| 0.4 | 5 | 7.5 | 0.9 | 1.35 | 0.81 | 1.8225 | 0.486 |
| 0.3 | 3 | 4.5 | -1.1 | -1.65 | 1.21 | 2.7225 | 0.5445 |
| Σ |  |  |  |  | 0.69 | 1.5525 | 1.035 |

Očekivani prinos akcije A i B:

COV (RA,RB)= [0.3 × (-0.1) × (-0.15)] + [0.4 × 0.9 × 1.35] + [ 0.3 × (-1.1) ×(-1.65)] = 1.035

Standardne devijacije su:

Koeficijet korelacije je onda:

Varijanse i standardne devijacije portfolia se računaju prema izrazu: .

1. **Uz pretpostavku različitih udela, varijanse i standardne devijacije portfolia su:**
2.

Standardna devijacija portfolija računata na bazi ponderisanog proseka:

Onda je razlika između standardne devijacije portfolija i standardne devijacije ponderisanog proseka jednaka 0. Odnosno, mogućnosti diverzifikacije ne postoje kada je koeficijent korelacije jednak 1.

1.

Standardna devijacija portfolija računata na bazi ponderisanog proseka:

Onda je razlika između standardne devijacije MVP i standardne devijacije poprtfolija sa ponderisanim prosekom jednaka 0. Odnosno, mogućnosti diverzifikacije ne postoje kada je koeficijent korelacije jednak 1.

1.

Standardna devijacija portfolija računata na bazi ponderisanog proseka:

Onda je razlika između standardne devijacije portfolija i standardne devijacije ponderisanog proseka jednaka 0. Odnosno, mogućnosti diverzifikacije ne postoje kada je koeficijent korelacije jednak 1.

1.

Standardna devijacija portfolija računata na bazi ponderisanog proseka:

Onda je razlika između standardne devijacije portfolija i standardne devijacije ponderisanog proseka jednaka 0. Odnosno, mogućnosti diverzifikacije ne postoje kada je koeficijent korelacije jednak 1.

**Zaključak:** Ovim primerom dokazano je da mogućnosti za diverzifikaciju, odnosno umanjenje rizika, ne postoje kada je koeficijent korelacije 1, bez obzira koliki su odeli tih instrumenata u portfoliju.

1. **Šarpov racio portfolija u pretpostavku različitih udela:**

Da bismo izračunali Šarpov racio, prvo računamo stopu prinosa portfolia koja je jednaka ponderisanom proseku pojedinačnih prinosa na hartije od vrednosti koje ulaze u portfolio, odnosno: .

Stope prinosa portfolia, uz pretpostavku različitih udela su sledeći:

Šarpov racio se računa na sledeći način:

 ; gde je prinos portfolia, je bezrizičina kamatna stopa za koju ćemo pretpostaviti da je 0, i je standardna devijacija portfolia.

Prema tome, Šarpov racio iznosi:

**Komentar:** Kada je korelacija između dva instrumenta 1, onda je Šarpov racio takođe nepromenjen sa promenom udela instrumenata u portfoliju.

**ZADATAK 6 – ucrtavanje Šarpovih racia na grafikon kada je korelacija 1**

Na bazi rezultata iz prethodnog zadatka (zadatka 5) nacrtajte grafikon i dokažite tvrdnju da se svi Šarpovi racii nalaze na jednoj istoj liniji. Prokomentarišite grafikon.

**Rešenje:**



**Komentar:** Izračunate vrednosti Šarpovih racia su nepromenjene kada je korelacija jednaka 1, bez obzira koliki su udeli pojedinačnih instrumenta u portfoliu. To znači da se sve tačke Šarpovih racia nalaze na jednoj pravoj liniji pod određenim uglom, iz čega se da zaključiti da se prinosi i rizici srazmerno menjaju, ali Šarpov raco ostaj nepromenjen. Drugim rečima, pozitivan nagib linije na kojoj se nalaze Šarpovi racii znači da veći prinos podrazumeva veći rizik, i obrnuto.

**ZADATAK 7 – konstrukcija portfolija sa minimalnom varijansom**

**Teorijski deo:**

Formula za izračunavanje udela sekundarnog instrumenta u portfoliju minimalne varijanse (*minimal variance portfolio* – MVP) od dva instrumenta glasi:

Uz uslov:

Oznaka predstavlja udeo (eng. weight) sekundarnog instrumenta (S) u portfoliju od dva instrumenta, gde je udeo primarnog instrumenta (P) onda 1 - . Ako je izračunati udeo () prema jednačini (1) manji od nule onda je udeo sekundarnog instrumenta 0, ako je veći od 1 onda je 1, a ako je između 0 i 1 onda je veličina udela onolika koliko je izračunata prema jednačini 1. Simbol označava varijansu primarnog instrumenta, simbol označava varijansu sekundarnog instrumenta, a simbol označava kovarijansu dva instrumenta. Prilikom računanja udela sekundarnog instrumenta u porfoliu, pravilo je da se za sekundarni instrument bira onaj koji je manje rizičan.

Kako bi se ocenio efekat diverzifikacije, odnosno ulaganje u još jedan instrumenat u cilju umanjenja rizika, moguće je izračunati indeks efikasnosti hedžiranja (HEI) prema sledećoj jednačini:



Pokazatelj HEI posmatra varijansu nehedžiranog ulaganja (tj. ulaganja u primarni instrumenat) i varijansu portfolija koja je hedžirana (tj. ulaganje u dva instrumenta). Ako je HEI vrednost manja od 1 to znači da je rizik portfolija umanjen konstrukcijom portfolija u skladu sa udelima računatim prema formuli za MVP. Odnosno, što je bliži HEI indeks jedinici, to je hedžiranje bolje. Sa druge strane, ako se dobije negativna HEI vrednost onda to znači da nehedžirano ulaganje ima niži rizik od hedžiranog ulaganja, odnosno to znači da ne treba kombinovati primarni instrument sa sekundarnim instrumentom.

**Primer:** Investitor ulaže primarno u američki indeks S&P500. U cilju smanjenja rizika, investitor odlučuje da kombinuje S&P500 indeks sa ulaganjem u zlato. Odredite koliki bi udeo zlata trebao da bude u MVP od dva instrumenta. Takođe, utvrdite kolika je varijansa portflija i njegov prinos. Prosečni prinosi S&P500 indeksa i zlata u tri moguća scenarija su dati u sledećoj tabeli:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Verovatnoća Pi | Prinos indeksa S&P (RS&P,i) | Prinos zlata(RGOLD,i) |
| Ekspanzija | 0,3 | 8 | 2 |
| Normalan rast | 0,5 | 5 | 6 |
| Recesija | 0,2 | -6 | 7 |

**Rešenje:**

Da bismo mogli da izračunamo udeo zlata u MVP, prvo treba da izračunamo varijanse oba instrumenta i njihovu kovarijansu.

  **Prinosi** **indeksa S&P500 i zlata**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Verovatnoća Pi | Prinos RS&P | Prinos RGOLD | OdstupanjeRS&P-E(RS&P) | OdstupanjeRGOLD-E(RGOLD) | Kvadrat odstupanja (varijansa)(RS&P-E(RS&P))2 | Kvadrat odstupanja (varijansa)(RGOLD-E(RGOLD))2 | KovarijansaCOV(RS&P,RGOLD) |
| 0,3 | 8 | 2 | 4,3 | -3,8 | 18,49 | 14,44 | 16,34 |
| 0,5 | 5 | 6 | 1,3 | 0,2 | 1,69 | 0,04 | 0,13 |
| 0,2 | -6 | 7 | -9,7 | 1,2 | 94,08 | 1,44 | 11,64 |
| Σ |  |  |  |  | 25,208 | 4.574 | 7,1 |

Očekivani prinos indeksa S&P500 i zlata:



Varijanse i standardne devijacije su:

 = 18,49 × 0,3 + 1,69 × 0,5 + 94,08 × 0,2 = 25,208

= 14,44 × 0,3 + 0,04 × 0,5 + 1,44 × 0,2 = 4,574

Kovarijansa je:

COV (RS&P,RGOLD)= [0,3 × 4,3 × (-3,8)] + [0,5 × 1,3 × 0,2] + [ 0,2 × (-9,7) × 1,2] = -4,902 + 0,13 - 2,328 = -7,1

Korelacija je:

Udeo sekundarnog instrumenta u MVP je:

Prema jednačini za MVP, investitor bi u proseku trebao da ulaže u zlato 73%, dok bi u indeks S&P500 trebao u proseku da ulaže 1 - 0,73 = 0,27 = 27%. Na ovaj način investitor je došao do portfolia koji ima minimalnu varijansu, odnosno najmanji rizik.

Prinos, varijansa i standardna devijacija portfolia minimalne varijanse (MVP) u tom slučaju su:

1.217294

Ako bismo hteli da vidimo kolika je varijansa sa udelima sekundarnog instrumenta koji su iznad i ispod udela MVP, npr. 80% i 60%, onda bi te varijanse iznosile:

Prinos, varijansa i standardna devijacija portfolia (A) sa udelom sekundarnog instrumenta od 80%:

 1.291647

Varijansa i standardna devijacija portfolia (B) sa udelom sekundarnog instrumenta od 60%:

 1.50943

Nakon izračunavanja varijanse portfolia, moguće je izračunati indeks efikasnosti hedžiranja (HEI) portfolija.

**Zaključak:** Vrednost HEI indeksa je veoma visoka u sva tri primera, što znači da je varijansa portfolio značajno umanjena u odnosu na primarni instrument S&P500 indeks. Drugim rečima, uključivanjem zlata u portfolio sa S&P500, postignuto je značajno umanjenje rizika portfolia. Međutim, ipak je uočljivo da MVP daje najbolje rezultate umanjenja rizika u odnosu na primarni instrument S&P500.

**ZADATAK 8** – **Ucrtavanje efikasne granice portfolia**

Na bazi zadatka 7, grafički prikažite efikasnu granicu portfolia, ucrtajte MVP, kao i dva portfolia (A i B) koji nemaju minimalnu varijansu. Takođe, ucrtajte pozicije S&P500 indeksa i zlata na grafikonu. Prokomentarišite sliku.



**Komentar:** Kriva granice efikasnih portfolija je uvek konveksna u odnosu na ordinatu. U temenu granice efikasnih portfolija nalazi se MVP, koji ima najnižu standardnu devijaciju uz određenu stopu prinosa. Kriva granice efikasnih portfolija može da se podeli na dva dela – iznad i ispod tačke MVP. Sve tačke iznad MVP (npr. tačka A) predstavljaju set efikasnih portfolija, odnosno ti portfoliji obezbeđuju veći prinos od MVP, ali uz veći rizik. Tačke ispod MVP (npr. tačka B) čine skup neefikasnih portfolija, i treba ih ignorisati, zato što uz manji prinos imaju i veći rizik. Sve tačke koje se nalaze ispod granice efikanih portfolija do horizontalne linije koja prolazi kroz tačku MVP, imaju lošije karatkeristike u odnusu na tačke koje se nalaze na granici efikasnih portfolija, i zato ih treba ignorisati. Koju će konkretnu kombinaciju iznad tačke MVP izabrati investitor zavisi od njegovih preferencija, jer veći prinos povlači i veći rizik. Tačka C predstavlja „portfolio“ koji čini 100% udela zlata i 0% udela S&P500, dok u tački D taj odnos čini 100% udela S&P500 i 0% zlata. Sa aspekta svih tačaka na slici, ulaganje 100% u S&P500 je najgora varijanta.

**ZADATAK 9** – **Izračunavanje stope nagrade u prihodu prema varijabilnosti portfolia**

**Teorijski deo:**

Problem alokacije investicija može dodatno da se proširi uvođenjem u analizu bezrizične aktive. Uključivanjem bezrizične aktive u analizu, možemo izraziti tzv. stopu nagrade u prihodu prema varijablinosti portfolia (Šarpov racio), koji povezuje stopu prinosa bezrizične aktive (npr. stopa prinosa trezorskih zapisa) sa određenim portfoliom. Drugim rečima, ovaj pokazatelje prikazuje odnos između prinosa i rizika portfolia, za razliku od MVP kome je bitan samo rizik.

**Primer:** Na bazi podataka za tri portfolija (MVP, A i B) iz zadatka 6, izračunajte stope nagrade u prihodu prema varijabilnosti portfolija, što je praktično Šarpov racio, za sva tri portfolija, ako je bezrizična stopa 2% i protumačite dobije rezultate.

Stope nagrade u prihodu prema varijabilnosti portfolija (Šarpov racio) su:

**Komentar:** Možemo primetiti da je stopa nagrade u prihodu prema varijabilnosti veća u portfoliu A, koji se nalazi iznada portfolia MVP na krivi granice efikasnih portfolia od portfolia sa minimalnom varijansom (MVP). Portfolio B spada u grupu neefikasnih portfolia i on ima niži S (Šarpov racio) u odnosu na MVP i portfolio A. Razlika u Šarpovom raciu između portfolia A i MVP je 2.62 – 2.18 = 0.44, što znači da se očekivani prinos portfolia A povećava za dodatka 44 bazična poena (skoro pola procenta) pri svakom povećanju standardne devijacije za jedan procenat.

 **ZADATAK 10 –** Ucrtavanje linije alokacije kapitala (CAL – *capital alocation line*)

**Teorijski deo:** Linija alokacije kapitala (CAL) označava moguće kombinacije rizika i prinosa, koji su rezultat različite alokacije aktive. Drugim rečima, CAL pokazuje koliki je dodatni prinos portfolia na dodatni rizik, i to se još naziva stopa nagrade u prihodu prema varijabilitetu. Zapravo, stopa nagrade u prihodu prema varijabilitetu je ista kod svih portfolia koji se nalaze na istoj CAL, samo se razlikuju kombinacije prinosa i rizika, odnosno 1% povećanja prinosa podrazumeva n% povećanja rizika, i obrnuto. Investitori koji nisu skloni riziku izabraće portfolio blizu tačke , a investitori koji su skloni riziku odbraće neku tačku blizu MVP, a investitori koji su još tolerantniji prema riziku odbraće neku tačku iznat tačke MVP na liniji granice efikasnih portfolia.

**Primer:** Na bazi proračuna iz zadatka 9, ucrtajte na grafikonu linije alokacije kapitala za sva tri portfolia. Prokomentarišite grafikon.



**Komentar:** Što neki portfolio ima veći Šarpov racio, to je CAL strmija. Možemo primetiti na grafikonu da najstrmiji CAL ima portfolio A, jer su njegovi prinosi po jedinici varijablinosti najveći. Prema tome, posmatrano sa aspekta Šarpovog racia, portfolia A je bolji od MVP, a oba su bolja od neefikasnog portfolia B.

**ZADATAK 11 – pravljenje optimalnog portfolia**

**Teorijski deo:** Optimalni portfolio je portfolio koji se nalazi na granici efikasnih portfolia i koji ima najveći Šarpov racio od svih mogućih portfolia. Drugim rečima, linija alokacije kapitala (CAL) od optimalnog portfolia je tangenta na liniju granice efikasnih portfolia. Udeo sekundarnog instrumenta u optimalnom portfoliu se računa na sledeći način:

gde je prinost sekundarnog instrumenta, prinos primarnog instrumenta, prinos bezrizičnog instrumenta. Simbol označava varijansu primarnog instrumenta, simbol označava varijansu sekundarnog instrumenta, a simbol označava kovarijansu dva instrumenta. Udeo primarnog instrumenta (P) u optimalnom portfoliu je 1 - .

**Primer:** Na bazi podataka iz zadatka 2, gde je , , , , i , izračunajte koliki je udeo sekundarog instrumenta (zlata) u optimalnom portfoliu, ako je bezrizična stopa 2%. Takođe izračunajte varijansu optimalnog portfolia, prinos optimalnog portfolia i Šarpov racio. Radi poređenja, izračunajte udeo sekundarnog instrumenta za MVP, varijansu za MVP, prinos za MVP i Šarpov racio za MVP i dajte komentar.

**Rešenje:**

Pošto je instrument B rizičniji, onda je on primarni instrument u portfoliu, a instrument A je sekundarni.

Udeo sekundarnog instrumenta A u MVP portfoliu prema jednačini za udeo u MVP je:

Onda je udeo primarnog instrumenta B 11%.

Standardne devijacije instrumenata A i B su:

7.745

17.906

Prinos, varijansa, standardna devijacija i Šarpov racio portfolia sa minimalnom varijansom je:

 7.49

 1.118

Udeo sekundarnog instrumenta A u optimalnom portfolio je:

Udeo instrumenta B u optimalnom portfoliu je 1 – 0.82 = 0.18 = 18%:

Prinos, varijansa, standardna devijacija i Šarpov racio u optimalnom portfoliu je:

 7.602

**Komentar:** Rezultati pokazuju da je razlika u Šarpovom raciu između optimalnog portfolia i MVP je 1.15 – 1.18 = 0.032, što znači da se očekivani prinos optimalnog portfolia povećava za dodatka 32 bazična poena (oko trećine procenta) pri svakom povećanju standardne devijacije za jedan procenat. Razlika između dva portfolia je tome što je u MVP udeo instrumenta B 11%, a instrumenta A 89%, dok je u optimalom portfoliu udeo instrumenta B 18%, a instrumenta A 82%.

**ZADATAK 12** – **ucrtavanje otimalnog portfolia na grafikonu**

Na bazi podataka iz zadatka 9, ucrtati na grafikonu MVP i optimalni portfolio (O), kao i linije alokacije kapitala (CAL). Protumačiti grafikon.



**Komentar:** Kao što se može videti na grafikonu, optimalni portfolio se nalazi severozapadno u odnosu na portfolio minimalne varijanse na granici efikasnih portfolia, što znači da optimalni portfolio nosi veći prinos, ali i veći rizik. Takođe, linija alokacije kapitala (CAL) je strmija za optimalni portfolio nego za MVP, što znači da optimalni portfolio donosi veći prinos po svakoj jedinici standardne devijacije od MVP, a konkretno to iznosi 32 bazična poena.

**ZADATAK 13** – **pravljenje kompletnog portfolia**

**Teorijski deo:** Komplentni portfolio je portfolio koji je sastvaljen od rizičnog portfolia i bezrizične aktive. Kompletni portfolio se nalazi na liniji alokacije kapitala (CAL) na kojoj se nalazi i optimalni portfolio, odnosno nagib CAL je najstrmiji mogući, tj. sve kombinacije portfolia na CAL nude najbolji odnos između prinosa i rizika. Razlika je u tome što investitor u kompletnom portfoliu ulaže određeni iznos sredstava u bezrizičnu aktivu, pa su prinos i rizik manji, dok su kod optimalnog portfolia sva sredstva uložena u rizičnu aktivu, pa su prinos i rizik veći. U zavisnosti od investitorovih preferenci prema riziku, veći ili manji deo investicija će biti uložen u nerizičnu aktivu.

**Primer:** Na bazi podataka iz zadatka 11, utvrdite koliko će investitor ulagati u instrumente A i B ako je njegova odluka da 39% investira u nerizičnu aktivu. Takođe, utvrdite koliki je onda prinos i standardna devijacija kompletnog portfolija. Protumačite dobije rezultate. Prikažite grafički optimalni i kompletni portfolio na CAL.

**Rešenje:**

Pošto je bezrizična stopa 2%, a stopa prinosa na optimalni portfolio je 10.612%, onda bi stopa prinosa kompletnog portfolia bila:

Standardna devijacija kompletnog portfolia se računa kao proizvod standardne devijacije optimalnog portfolia i procenta ulaganja u optimalni portfolio, jer ulaganje u bezrizičnu aktivu ne nosi nikakav rizik, pa je ne uključujemo u proračun.

Udeo bezrizične akive je 39%, pa se udeli instrumenata A i B u kompletnom portfoliu se dobijaju kao proizvod udela u optimalnom portfoliu i udela u kompletnom portfoliu.

Kada se saberu svi udeli, zbir mora biti 100%. Prema tome, 50% + 11% +39% = 100%.

**Komentar:** I optimalni portfolio ( i kompletni portfolio ( se nalaze na istoj CAL koja obezbeđuje najviši odnos prinosa po jedinici rizika. Linija CAL polazi iz tačke (, odnosno iz tačke (ulaganja) koje ne nosi nikakav rizik (npr. trezorski zapisi vlade SAD). Ulaganje u trezorske zapise donosi 2% prinosa, bez rizika. Linija CAL je pod određenim uglom, što znači da sva ulaganja u neku rizičnu aktivu donose veći prinos, ali po većoj jedinici rizika. Tačka označava optimalni portfolio, odnosno u toj tački su prinos i rizik najviši u apsolutnom smislu, tj. u toj tački investitor sva sredstva ulaže u rizičnu aktivu. Tačka je tačka u kojoj CAL tangira granicu efikasnih portfolija, što znači da tačke iznad na CAL nisu dostupne. Tačka označava kompletni portfolio, koja ima isti odnos između prinosa i rizika kao i , ali su ti prinosi i rizici niži u apsolutnom smislu nego u slučaju , zato što investitor deo sredstava ulaže u bezrizičnu aktivu.

