АКТУАРСКА МАТЕМАТИКА

- Формуле -

Др Наташа Папић-Благојевић

1. Осигурање живота

Вероватноћа живота и смрти једног лица

$l_x > l_{x+1} > l_{x+2} > \ldots > l_{x+n}$

$d_x = l_x - l_{x+1} \Rightarrow l_{x+1} = l_x - d_x$

- вероватноћа да ће лице старо x година доживети $(x+k)$ година

  $${}_k p_x = \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

- вероватноћа да ће лице старо x година доживети $(x+n)$ година

  $${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

- вероватноћа да лице старо x година неће доживети $x+1$ годину

  $$q_x = 1 - p_x$$

  $$p_x + q_x = 1$$

- вероватноћа да лице старо x година неће доживети $x+n$ година

  $${}_{|n} q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

  $${}_{|n} q_x = 1 - {}_n p_x$$

  $${}_n p_x + {}_{|n} q_x = 1$$

- број чланова групе лица старости x година који ће вероватно живети после k година

  $$G = \sum G \cdot {}_k p_x = \sum G \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

Вероватно трајање живота

$$\frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{1}{2} => l_{x+k} = \frac{l_x}{2}$$

Средње трајање живота

- прва варијанта (почетком године)

  $$e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} \ldots}{l_x}$$

- друга варијанта (крајем године)

$$e'_x = \frac{l_x + l_{x+1} + l_{x+2} \dots}{l_x} = 1 + e_x$$

- аритметичка средина прве и друге варијанте

$$e_x^0 = \frac{e_x + e'_x}{2} = \frac{e_x + 1 + e_x}{2} = \frac{1}{2} + e_x$$

Вероватноћа живота и смрти два лица

- вероватноћа да ће оба лица живети још *n* година

$${}_n p_{xy} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} = {}_n p_x \cdot {}_n p_y$$

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_n}$$

$${}_n p_y = \frac{l_{y+n}}{l_n}$$

- вероватноћа да оба лица неће бити у животу после *n* година

$${}_n q_{xy} = 1 - {}_n p_{xy} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} = 1 - {}_n p_x \cdot {}_n p_y$$

- вероватноћа да ће после *n* година бити живо само лице *A*

$${}_n p_{x'y} = {}_n p_x \cdot (1 - {}_n p_y)$$

$${}_n p_{x'y} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \left(1 - \frac{l_{y+n}}{l_y}\right)$$

- вероватноћа да ће после *n* година бити живо само лице *B*

$${}_n p_{xy'} = {}_n p_y \cdot (1 - {}_n p_x)$$

$${}_n p_{xy'} = \frac{l_{y+n}}{l_y} \cdot \left(1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}\right)$$

Осигурање личне ренте уплатом мизе

1. **Непосредна доживотна рента**

а) *Антиципативна рента*

$$a_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$M = R \cdot a_x$$

б) *Декурзивна рента*

$$a'_x = \frac{N_x - D_x}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} - 1 = a_x - 1 = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$M = R \cdot a'_x$$

2. **Одложена доживотна рента**

а) *Антиципативна рента*

$${}_{k|}a_x = \frac{N_{x+k}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_{k|}a_x$$

б) *Декурзивна рента*

$${}_{k|}a'_x = \frac{N_{x+k+1}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_{k|}a'_x$$

3. **Непосредна привремена рента**

а) *Антиципативна рента*

$${}_{|n}a_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_{|n}a_x$$

б) *Декурзивна рента*

$${}_{|n}a'_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_{|n}a'_x$$

4. Одложена привремена рента

а) *Антиципативна рента*

$$_{k|n}a_x = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_{k|n}\, a_x$$

б) *Декурзивна рента*

$$_{k|n}a'_x = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_{k|n}\, a'_x$$

<u>Осигурање личне ренте уплатом премије</u>

1. Премија се плаћа доживотно

а) *Рента се прима непосредно и доживотно*

- *Антиципативна рента*

$$P(a_x) = 1 => P = R \cdot P(a_x) = R$$

- *Декурзивна рента*

$$P(a'_x) = 1 - \frac{D_x}{N_x} = 1 - \frac{1}{a_x}$$

$$P = R \cdot P(a'_x)$$

б) *Рента се прима одложено и доживотно* (*антиципативно*)

$$P({}_{k|}a_x) = \frac{N_{x+k}}{N_x}$$

$$P = R \cdot P({}_{k|}a_x)$$

2. Премија се плаћа привремено (највише *m* пута) и антиципативно

а) *Рента се прима непосредно и доживотно*

$$_mP(a_x) = \frac{N_x}{N_x - N_{x+m}}$$

$$P = R \cdot {}_m\, P(a_x)$$

б) *Рента се прима после k година и доживотно*

$${}_{m}P({}_{k|}a_x) = \frac{N_{x+k}}{N_x - N_{x+m}}$$

$$P = R \cdot {}_{m}P({}_{k|}a_x)$$

в) *Рента се прима првих n година*

$${}_{m}P({}_{|n}a_x) = \frac{N_x - N_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

$$P = R \cdot {}_{m}P({}_{|n}a_x)$$

г) *Рента се прима после k година, али највише n пута*

$${}_{m}P({}_{k|n}a_x) = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

$$P = R \cdot {}_{m}P({}_{k|n}a_x)$$

Осигурање капитала уплатом мизе

1. **Осигурање капитала за случај смрти**

   а) *Доживотно осигурање капитала за случај смрти*

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

$$M = K \cdot A_x$$

б) *Одложено осигурање капитала за случај смрти*

$${}_{k|}A_x = \frac{M_{x+k}}{D_x}$$

$$M = K \cdot {}_{k|}A_x$$

в) *Привремено осигурање за случај смрти*

$$_{|n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$M = K \cdot {}_{|n} A_x$$

г) *Одложено и привремено осигурање за случај смрти*

$$_{k|n}A_x = \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x}$$

$$M = K \cdot {}_{k|n} A_x$$

2. Осигурање капитала за случај доживљења

$$_{|n}E_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$M = K \cdot {}_{|n} E_x$$

3. Мешовито осигурање

$$A_{x,n} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x,n} = {}_{|n} A + {}_{|n} E_x$$

$$M = K \cdot A_{x,n}$$

Осигурање капитала уплатом годишње премије

1. Премија се плаћа доживотно

а) *Непосредно осигурање капитала (без услова и ограничења)*

$$P(A_x) = \frac{M_x}{N_x} = \frac{A_x}{a_x}$$

$$P = K \cdot P(A_x)$$

б) *Одложено осигурање капитала*

$$P({}_{k|}A_x) = \frac{M_{x+k}}{N_x} = \frac{{}_{k|}A_x}{a_x}$$

$$P = K \cdot P({}_{k|}A_x)$$

2. Премија се плаћа привремено

а) *Доживотно осигурање капитала за случај смрти*

$${}_mP(A_x) = \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} = \frac{A_x}{{}_{|m}a_x}$$

$$P = K \cdot {}_m P(A_x)$$

б) *Привремено осигурање капитала за случај смрти* (*на n година*)

$${}_mP({}_{|n}A_x) = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} = \frac{{}_{|n}A_x}{{}_{|m}a_x}$$

$$P = K \cdot {}_m P({}_{|n}A_x)$$

в) *Привремено осигурање капитала за случај доживљења*

$${}_mP({}_{|n}E_x) = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} = \frac{{}_{|n}E_x}{{}_{|m}a_x}$$

$$P = K \cdot {}_m P({}_{|n}E_x)$$

г) *Мешовито осигурање капитала*

$${}_mP(A_{x,n}) = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} = {}_m P({}_{|n}A_x) + {}_m P({}_{|n}E_x)$$

$$P = K \cdot {}_m P(A_{x,n})$$

<u>Осигурање капитала уплатом месечне премије</u>

1. **Премија се плаћа доживотно**

   а) *Непосредно осигурање капитала (без услова и ограничења)*

$$P^m(A_x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{M_x}{N_x} \cdot r$$

$$P^m = K \cdot P^m(A_x)$$

   б) *Одложено осигурање капитала*

$$P^m({}_{k|}A_x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{M_{x+k}}{N_x} \cdot r$$

$$P^m = K \cdot P^m({}_{k|}A_x)$$

2. **Премија се плаћа привремено**

   а) *Доживотно осигурање капитала за случај смрти*

$${}_mP^m(A_x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} \cdot r$$

$$P^m = K \cdot {}_m P^m(A_x)$$

   б) *Привремено осигурање капитала за случај смрти* (*на* n *година*)

$${}_mP^m({}_{|n}A_x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \cdot r$$

$$P^m = K \cdot {}_m P^m({}_{|n}A_x)$$

   в) *Привремено осигурање капитала за случај доживљења*

$${}_mP^m({}_{|n}E_x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \cdot r$$

$$P^m = K \cdot {}_m P^m({}_{|n}E_x)$$

г) *Мешовито осигурање капитала*

$$ {}_{m}P^{m}(A_{x,n}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \cdot r $$

$$ P^{m} = K \cdot_{m} P^{m}(A_{x,n}) $$

2. Математичке резерве

Нето методе

1. Књиговодствена метода

$$ {}_{t+1}V_x = \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}}({}_tV_x + P_x) - \frac{C_{x+t}}{D_{x+t+1}} $$

2. Ретроспективна метода

$$ {}_tV_x = \frac{P_x \cdot (N_x - N_{x+t}) - (M_x - M_{x+t})}{D_{x+t}} $$

3. Проспективна метода

$$ {}_tV_x = \frac{M_{x+t} - P_x \cdot N_{x+t}}{D_{x+t}} $$

4. Ретроспективна метода за мешовито осигурање

$$ {}_tV_x = \left(P_{x,n]} \cdot a_{x,t]} - A_{x,t]}\right) \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}} $$

$$ P_{x,n]} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} $$

$$ a_{x,t]} = \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x} $$

$$A_{x,t]} = \frac{M_x - M_{x+t}}{D_x}$$

5. **Проспективна метода за мешовито осигурање**

$${}_tV_x = A_{x+t,n-t]} - P_{x,n]} \cdot a_{x+t,n-t]}$$

$$A_{x+t,n-t]} = \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}}$$

$$P_{x,n]} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

$$a_{x+t,n-t]} = \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}$$

<u>Бруто методе</u>

Годишња премија за мешовито осигурање:

$$P_{x,n]} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Вредност свих премија које ће доспети у току *n* година:

$$a_{x,n]} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Садашња вредност свих отплата:

$$\alpha \cdot a_{x,n]}$$