EKONOMSKE FUNKCIJE – FUNKCIJE PONUDE I TRAŽNJE, ODREĐIVANJE RAVNOTEŽNE CENE, FUNKCIJA UKUPNOG PRIHODA

1. Pregled nekih elementarnih funkcija

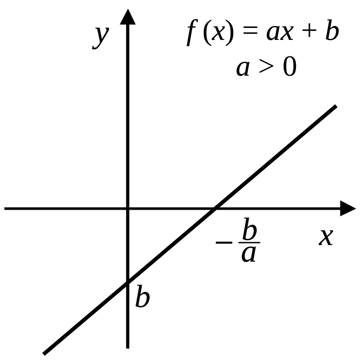
- ***Linearna funkcija***

Polinom prvog stepena, tj. funkcija oblika $y = ax + b$, $(a \neq 0,\ a,b \in \mathrm{R})$ naziva se *linearna funkcija*. Domen definisanosti je $D_f = \mathrm{R}$ i nije periodična. Ako je $b = 0$ funkcija je neparna.

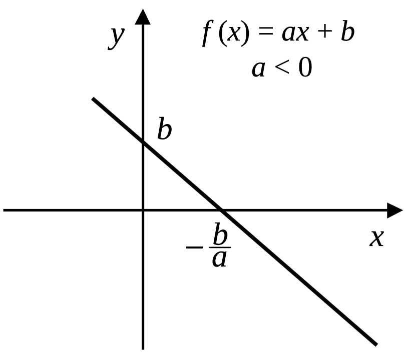
Nula funkcije je $x = -\frac{b}{a}$. Za $a > 0$ funkcija je pozitivna ako je $x > -\frac{b}{a}$, a negativna za $x < -\frac{b}{a}$. U slučaju da je $a < 0$ funkcija je pozitivna za $x < -\frac{b}{a}$, a negativna za $x > -\frac{b}{a}$.

Funkcija nema ekstrem i za $a > 0$ je strogo rastuća, a za $a < 0$ je strogo opadajuća.

Grafik funkcije je prava linija (slika 3.2.1a) i b)).



a)



b)

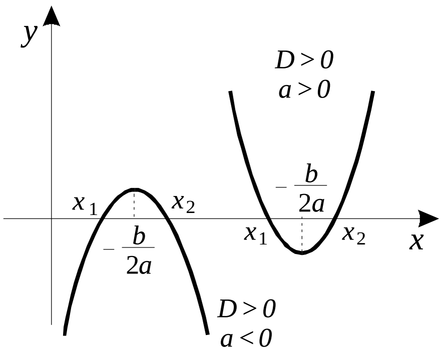
Slika 1.1

- ***Kvadratna funkcija***

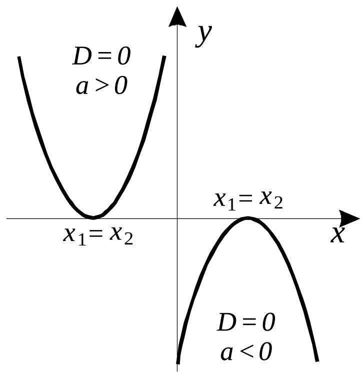
Polinom drugog stepena, tj. funkcija oblika $y = ax^2 + bx + c$ ($a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) naziva se *kvadratna funkcija*. Domen definisanosti je $D_f = \mathbb{R}$. Ako je $b = c = 0$ funkcija je parna. Funkcija može imati dve nule, jednu nulu, ili nemati nula, u zavisnosti od vrednosti diskriminante $D = b^2 - 4ac$. Ako je diskriminanta $D > 0$ funkcija ima dve različite nule x_1 i x_2. Ako je $D = 0$ tada je $x_1 = x_2$, a ako je $D < 0$ funkcija nema nula.

Predznak funkcije takođe zavisi od vrednosti diskrimnante D, ali i od vrednosti parametra a. Ako su x_1 i x_2 nule funkcije i $x_1 < x_2$ imamo:

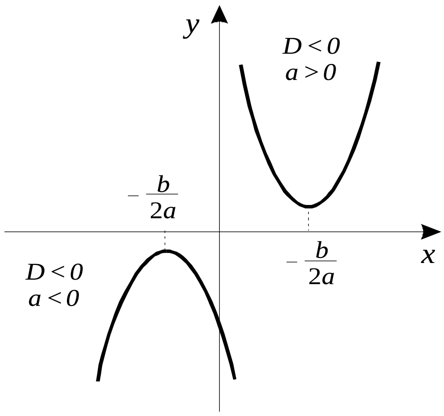
1. $\left.\begin{matrix} D > 0 \\ a > 0 \end{matrix}\right\}$ $\quad$ $y > 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, $\quad$ $y < 0$ za $x \in (x_1, x_2)$ $\quad$ (slika 1.2);
2. $\left.\begin{matrix} D > 0 \\ a < 0 \end{matrix}\right\}$ $\quad$ $y > 0$ za $x \in (x_1, x_2)$, $\quad$ $y < 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ $\quad$ (slika 1.2);
3. $\left.\begin{matrix} D = 0 \\ a > 0 \end{matrix}\right\}$ $\quad$ $x_1 = x_2$, $y \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$. $\quad$ (slika 1.3);
4. $\left.\begin{matrix} D = 0 \\ a < 0 \end{matrix}\right\}$ $\quad$ $x_1 = x_2$, $y \leq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$. $\quad$ (slika 1.3);
5. $\left.\begin{matrix} D < 0 \\ a > 0 \end{matrix}\right\}$ $\quad$ $y > 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$. $\quad$ (slika 1.4);
6. $\left.\begin{matrix} D < 0 \\ a < 0 \end{matrix}\right\}$ $\quad$ $y < 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$. $\quad$ (slika 1.4).



Slika 1.2



Slika 1.3



Slika 1.4

Funkcija ima ekstremne vrednosti i to: kada je $a > 0$ minimum $y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a}$ za $x = -\frac{b}{2a}$, a kada je $a < 0$ ima maksimum $y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a}$ za $x = -\frac{b}{2a}$. U slučaju da je $a > 0$ funkcija opada u intervalu $(-\infty, -\frac{b}{2a})$, a raste u intervalu $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$. Za $a < 0$ funkcija raste u intervalu $(-\infty, -\frac{b}{2a})$, a opada u intervalu $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$.

Funkcija nema prevojnih tačaka i u slučaju da je $a > 0$ ona je konveksna, a za $a < 0$ konkavna. Grafik funkcije je parabola.

2. Neke ekonomske funkcije

2.1 Funkcija tražnje

Funkcija tražnje najčešće se iskazuje kao funkcija jedne nezavisno promenljive, tj:

$$q = f(p) \tag{2.1}$$

gde je q tražnja (količina tražene robe), a p cena tog proizvoda. Jasno je da mora biti ispunjen uslov $p > 0$, $q > 0$.

Funkcija tražnje je po pravilu monotono opadajuća funkcija, što je i logično, jer porastom cene proizvoda opada i njegova tražnja. Ova osobina je poznata kao *uslov normalnosti tražnje*.

Ako je funkcija tražnje $q = f(p)$ i postoji njena inverzna funkcija $p = f^{-1}(q)$ tada se ona naziva *inverzni oblik funkcije tražnje* i u ovom slučaju je cena proizvoda p prikazana u funkciji količine tražene robe.

Primer 2.1

Ispitati i grafički prikazati funkciju tražnje oblika

$$q = 20 - p\,.$$

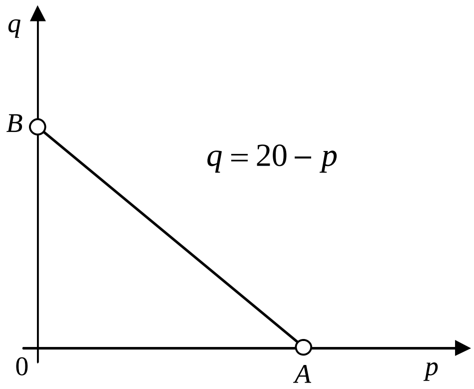
Rešenje. Data funkcija je definisana za

$$p > 0 \wedge 20 - p > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < p < 20\,.$$

Dakle, D_q = (0, 20). Funkcija je opadajuća, odnosno zadovoljava uslov normalnosti. Za $p = 20$ je $q = 0$, odnosno

$$q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 20 - p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = 20\,.$$

Isto tako, za $p = 0$ je $q = 20$. Grafik ove funkcije je prava linija prikazana na slici 2.1. Kako mora biti ispunjen uslov $p > 0$ i $q > 0$, tačke *A*(20, 0) i *B*(0, 20) ne pripadaju grafiku ove funkcije.



Slika 2.1

U pojedinim slučajevima u ponašanju funkcije tražnje postoje izvesni paradoksi. Naime, dešava se da sa porastom cene nekog proizvoda raste i tražnja za tim proizvodom jer potrošači, očekujući još višu cenu, kupuju upravo taj proizvod. Poznat je i *Veblenov efekat* koji se javlja kod kupovine određenih luksuznih proizvoda gde porast cene inicira porast tražnje jer su to proizvodi koje određena grupa potrošača ne kupuje zbog njihove stvarne vrednosti već zbog prestiža. Isto tako poznat je i tzv. *Gifenov paradoks* gde porast cene određenog proizvoda koji dominira u tražnji grupe potrošača sa niskim primanjima izaziva njegovu veću tražnju.

2.2 Funkcija ponude

Funkcija oblika

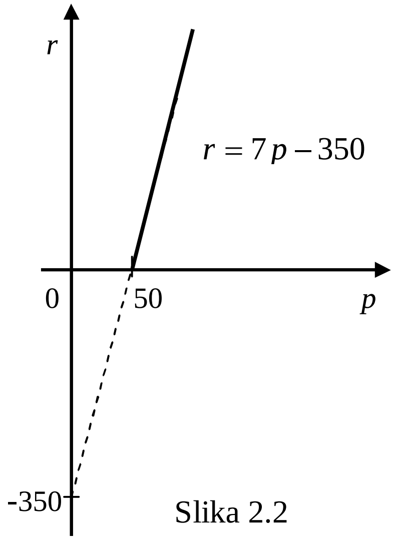
$$r = f(p) \tag{2.2}$$

naziva se *funkcija ponude*, gde je *r* količina ponuđene robe, a *p* cena tog proizvoda. Takođe je, i u ovom slučaju, $p > 0$, $r > 0$. Za razliku od funkcije tražnje ova funkcija je po pravilu monotono rastuća, jer sa porastom cene nekog proizvoda na tržištu raste i njegova ponuda.

Primer 2.2

Grafički prikazati funkciju ponude oblika

$$r = 7p - 350\,.$$



Slika 2.2

Rešenje. Na osnovu uslova definisanosti funkcije ponude je $p > 0$, $r > 0$, odnosno

$$p > 0, \quad 7p - 350 > 0.$$

Otuda je $p > 50$, tj. $D_r = (50, +\infty)$. Grafik funkcije dat je na slici 2.2.

Skup funkcija tražnje i ponude oblika

$$\left.\begin{aligned} q &= f_1(p) \\ r &= f_2(p) \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

predstavlja *model tržišta*. U postavljenom modelu tržišta važni su uslovi ravnoteže. Pod ovim uslovima podrazumevamo ravnotežnu ponudu i tražnju koje se postižu za cenu ravnoteže.

Cena ravnoteže se dobija iz uslova

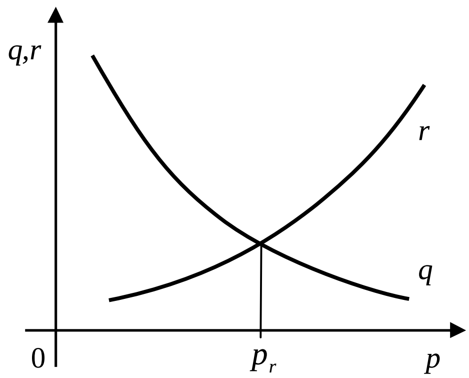
$$q = r$$

odnosno

$$f_1(p_r) = f_2(p_r),$$

gde je p_r ravnotežna cena.

Grafički, cena ravnoteže se određuje kao apscisa presečne tačke funkcija ponude i tražnje (slika 2.3). Cena ravnoteže je osobina lokalnog karaktera.



Slika 2.3

➢ Primer 2.3

Za funkcije tražnje i ponude $q = -3p + 6$ i $r = \sqrt{2p + 8}$ odrediti uslove ravnoteže.

Rešenje. Uslov ravnoteže je $q = p$, odnosno

$$-3p + 6 = \sqrt{2p + 8}.$$

Otuda je $(-3p + 6)^2 = 2p + 8$, odnosno $9p^2 - 36p + 36 = 2p + 8$. Dobijamo kvadratnu jednačinu $9p^2 - 38p + 28 = 0$ čija su rešenja

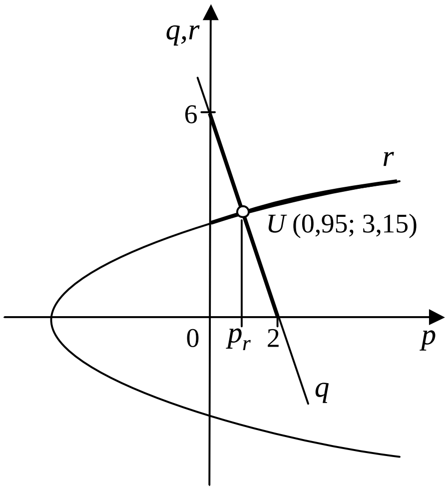
$$p_{1,2} = \frac{38 \pm \sqrt{38^2 - 36 \cdot 28}}{18} = \frac{38 \pm 20{,}88}{18},$$

$$p_1 = 0{,}95 \quad \text{i} \quad p_2 = 3{,}27.$$

Iz uslova $q > 0$ i $p > 0$ dobijamo da je D_q = (0, 2), pa $p_2 = 3{,}27$ ne može biti ravnotežna cena. Prema tome, uslovi ravnoteže su

$$p_r = 0{,}95 \qquad \text{i} \qquad q_r = r_r = 3{,}15 .$$

Rešenje je grafički predstavljeno na slici 2.4.



Slika 2.4

2.3 Funkcija ukupnog prihoda

Neka je poznata funkcija tražnje određenog proizvoda $q = f(p)$. Tada je funkcija ukupnog prihoda data formulom

$$P = P(p) = p \cdot q = p \cdot f(p). \qquad (2.4)$$

Ako je poznata funkcija $p = f_1(q)$, funkcija ukupnog prihoda se može prikazati u zavisnosti od tražnje q:

$$P = P(q) = p \cdot q = f_1(q) \cdot q . \qquad (2.5)$$

Funkcije oblika (2.4) i (2.5) mogu se grafički predstaviti u koordinatnom sistemu. Napomenimo da je $P(0) = 0$.

Iz funkcije (2.4), odnosno (2.5), možemo dobiti funkciju prosečnog prihoda

$$\overline{P} = \overline{P}(p) = \frac{P(p)}{p}, \qquad (2.6)$$

odnosno prihod po jedinici proizvoda

$$\overline{P} = \overline{P}(q) = \frac{P(q)}{q}. \tag{2.7}$$

➢ Primer 2.4

Data je funkcija tražnje oblika $q = 200 - p$. Odrediti i grafički predstaviti funkcije

(*i*) $P(p)$ i $P(q)$, (*ii*) $\overline{P}$.

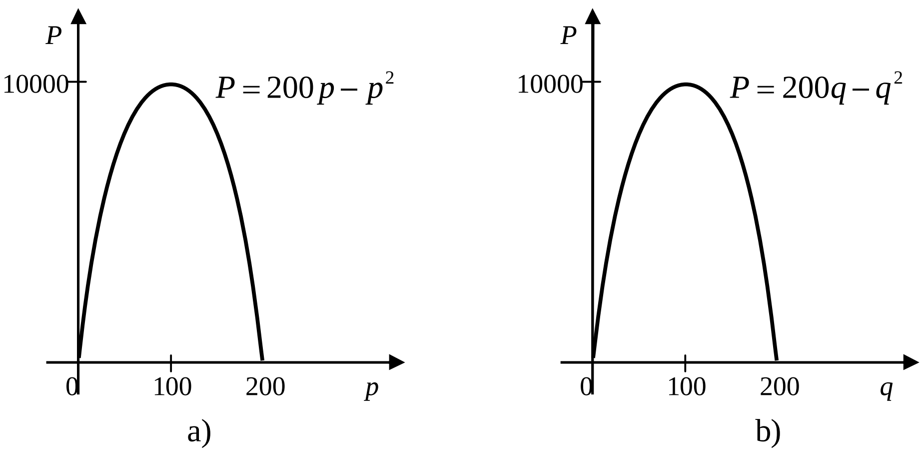
Rešenje.

(*i*) $P = P(p) = p \cdot q = p \cdot (200 - p) = 200p - p^2$.

Iz $q = 200 - p$ imamo $p = 200 - q$. Tada je

$P = P(q) = p \cdot q = (200 - q) \cdot q = 200q - q^2$.

Funkcije ukupnog prihoda grafički su predstavljene na slici 2.5 a) i b).

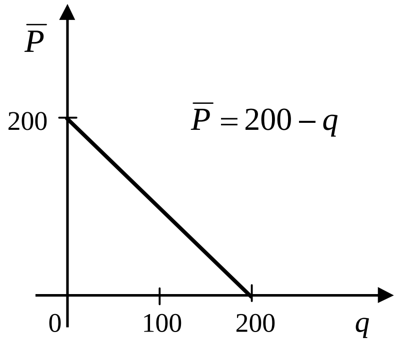


Slika 2.5

(*ii*) Prosečan prihod je

$$\overline{P} = \overline{P}(q) = \frac{P(q)}{q} = \frac{200q - q^2}{q} = 200 - q.$$

Grafički je prosečan prihod predstavljen na slici 2.6.



Slika 2.6