EKONOMSKE FUNKCIJE – FUNKCIJA UKUPNIH I PROSEČNIH TROŠKOVA, FUNKCIJA DOBITI

Krajnji cilj ove lekcije jeste određivanje intervala rentabilne proizvodnje, optimalnog obima proizvodnje, kao i maksimalne dobiti.

1. Funkcija ukupnih i prosečnih troškova

Funkcija oblika

$$C = C(q) \tag{1.1}$$

naziva se *funkcija ukupnih troškova*, gde je q fizički obim proizvodnje. U normalnim uslovima funkcija ukupnih troškova je najčešće data u nekom od sledećih oblika:

$$C = aq + b\,, \qquad C = aq^2 + bq + c\,, \qquad C = ab^q\,,$$

ali može imati i neki drugi matematički oblik.

Za funkciju troškova $C = C(q)$, u oblasti u kojoj je definisana, važi

$$C(q) > 0\,, \qquad C(q)\nearrow,$$

jer se troškovi povećavaju sa povećavanjem fizičkog obima proizvodnje.

Prosečni troškovi predstavljaju troškove po jedinici proizvoda, tj.

$$\overline{C} = \overline{C}(q) = \frac{C(q)}{q}\,. \tag{1.2}$$

Određivanjem minimuma funkcije (1.2) moguće je odrediti obim proizvodnje q za koju će prosečni troškovi biti najmanji.

Takođe je $C(0) \neq 0$, jer fiksni troškovi postoje i kada je obim proizvodnje jednak nuli.

Primer 1.1

Data je funkcija prosečnih troškova

$$\overline{C} = \overline{C}(q) = 3q + 5 + \frac{15}{q}.$$

Odrediti:

(*i*) $C(q)$, (*ii*) $C(0)$,

(*iii*) $C(100)$ i $\overline{C}(100)$.

Rešenje.

(*i*) Iz $\overline{C}(q) = \dfrac{C(q)}{q}$ imamo $C(q) = q \cdot \overline{C}(q) = q \cdot \left(3q + 5 + \dfrac{15}{q}\right) = 3q^2 + 5q + 15$.

(*ii*) $C(0) = 15$.

(*iii*) $C(100) = 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^2 + 15 = 30\,000 + 500 + 15 = 30515$.

$$\overline{C}(100) = 3 \cdot 100 + 5 + \frac{15}{100} = 305 + \frac{3}{20} = \frac{6103}{20}.$$

1.2 Funkcija profita

Funkcija oblika

$$D(q) = P(q) - C(q) \tag{1.3}$$

naziva se *funkcija profita* (*dobiti*), gde je $P = P(q)$ funkcija ukupnog prihoda, a $C = C(q)$ funkcija ukupnih troškova.

Funkcija profita se takođe može prikazati u obliku

$$D(p) = P(p) - C(p), \tag{1.4}$$

odnosno u funkciji cene *p*.

Interval rentabilne proizvodnje dobija se kada je $D(q) > 0$, odnosno $D(p) > 0$.

Primer 1.2

Date su funkcije $q = 200 - p$ i $C(q) = q^2 - 60q + 2400$. Odrediti

a) funkciju ukupnog prihoda $P = P(q)$

b) funkciju dobiti $D = D(q)$

c) interval rentabilne proizvodnje

d) optimalan obim proizvodnje i maksimalnu dobit.

Rešenje. Odredimo prvo funkciju ukupnog prihoda. Imamo

$$P(q) = p \cdot q = q \cdot (200 - q) = 200q - q^2.$$

Funkcija profita je

$$\begin{aligned} D(q) = P(q) - C(q) &= 200q - q^2 - q^2 + 60q - 2400 \\ &= -2q^2 + 260q - 2400. \end{aligned}$$

Tada je interval rentabilne proizvodnje

$$\begin{aligned} D(q) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -2q^2 + 260q - 2400 > 0 \\ \Leftrightarrow \quad q^2 - 130q + 1200 < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad q_{rent} \in (10, 120). \end{aligned}$$

Optimalan obim proizvodnje je

$$q_{opt} = \frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{10 + 120}{2} = 65,$$

dok se maksimalna dobit $D_{\max}$ dobija računajući vrednost funkcije dobiti za $q_{opt} = 65$, odnosno,

$$D_{\max} = D(q_{opt}) = D(65) = -2 \cdot 65^2 + 260 \cdot 65 - 2400 = 6050.$$

➢ Primer 1.3

Date su funkcije tražnje $q = 15 - \frac{1}{4}p$ i funkcija ukupnih troškova $C(q) = 3q^2 - 80q + 672$. Odrediti

a) funkciju ukupnog prihoda $P = P(p)$

b) funkciju ukupnog prihoda $P = P(q)$

c) funkciju dobiti $D = D(q)$

d) interval rentabilne proizvodnje

e) optimalan obim proizvodnje i maksimalnu dobit.

Rešenje. a) $P(p) = p \cdot q(p) = p \cdot (15 - \frac{1}{4}p) = 15p - \frac{1}{4}p^2.$

b) Da bismo odredili funkciju ukupnog prihoda $P = P(q)$, odredimo najpre zavisnost cene p od tražnje q. U tom slučaju imamo

$$q = 15 - \frac{1}{4}p \Leftrightarrow 4q = 60 - p \Leftrightarrow p = 60 - 4q,$$

te dobijamo

$$P(q) = p(q) \cdot q = (60 - 4q)q = 60q - 4q^2.$$

c) Funkcija profita je

$$D(q) = P(q) - C(q) = 60q - 4q^2 - 3q^2 + 80q - 672$$
$$= -7q^2 + 140q - 672.$$

d) U slučaju intervala rentabilne proizvodnje važi

$$D(q) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -7q^2 + 140q - 672 > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad q^2 - 20q + 96 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad q_{rent} \in (8, 12).$$

e) Optimalan obim proizvodnje je

$$q_{opt} = \frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{8+12}{2} = 10,$$

dok se maksimalna dobit $D_{\max}$ dobija računajući vrednost funkcije dobiti za $q_{opt} = 10,$ odnosno,

$$D_{\max} = D(q_{opt}) = D(10) = -7 \cdot 10^2 + 140 \cdot 10 - 672 = 28.$$