



## ФАКТОР ДОДАЈНИХ УЛОГА

Када говоримо о фактору акумулације и есконтном фактору, говоримо о случајевима где је улаган само један износ (почетни капитал  $K$ ), без додатних улагања. Међутим, у пракси је оваква ситуација ретка јер се често указује потреба за додатним улагањима.

Додатни улози могу бити у истим или различитим износима, могу се улагати у истим или различитим временским интервалима који се могу поклапати са временом капиталисања, али могу бити и чешћи или ређи од периода капиталисања.

### Антиципативни улози

Ако се додатни улози улажу на почетку сваког обрачунског периода (на почетку сваке године), онда за таква улагања кажемо да су **антиципативна**.

Ако се почетком сваке године улаже сума  $S_n$  од свих улога по  $U$  динара уз годишњу декурзивну каматну стопу  $p$  и годишње декурзивно капиталисање, при чему је  $n$  број улога, тада је:

$$S_n = U \cdot r \frac{r^n - 1}{r - 1} ; \quad \text{или} \quad S_n = U \cdot III_{p\%}^n ;$$

где је  $III_{p\%}^n = r \frac{r^n - 1}{r - 1} ;$

$S_n$  је сума свих улога по  $U$  динара, уложених почетком обрачунских периода, заједно са припадајућим каматама.

$III_{p\%}^n$  су треће каматне таблице и налазе се као треће таблице у таблицама сложених камата.

Израз  $r \frac{r^n - 1}{r - 1}$  назива се **фактор додајних улога** и његова вредност за дато  $p$  и  $n$  је дата у трећим каматним таблицама.

### **Пример 1.**

Почетком сваке године врши се улагање у банку у износу од 1.000 дин. Са којом сумом ће се располагати на крају пете године, ако је каматна стопа  $4\%(pa)d$ , а капиталисање годишње?

Решење:

Пошто се улагање врши почетком сваке године у питању су антиципативни улози, па из датих услова

$$U=1.000; \quad p=4\%; \quad n=5; \quad r=1,04$$

следи:

$$S_n = U \cdot III_{p\%}^n = 1.000 \cdot III_{4\%}^5 = 1.000 \cdot 5,6330 = 5.633 \text{ дин.}$$

или

$$S_n = U \cdot r \frac{r^n - 1}{r - 1} = 1.000 \cdot 1,04 \cdot \frac{1,04^5 - 1}{1,04 - 1} = 5632,98 \approx 5633 \text{ дин.}$$

**Пример 2.**

Почетком сваког полугодишта, у наредних 6 година, улаже се у банку по 3.000 дин. уз каматну стопу 8% ( $pa$ ) $d$  и полугодишње капиталисање. Одредити суму улога:

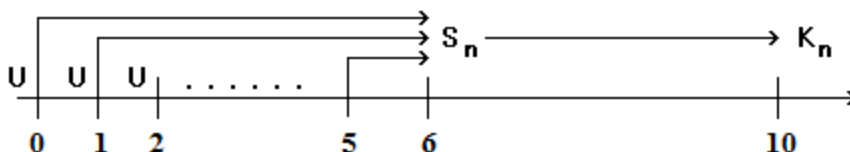
а) После 6 година; б) После 10 година.

Решење:

а) У питању су антиципативни улози, али је капиталисање полугодишње, па за дато  $n=6 \cdot 2=12$ ,  $p=8\% : 2=4\%$  и  $U=3.000$  дин. следи:

$$S_n = U \cdot III_{p\%}^n = 3.000 \cdot III_{4\%}^{12} = 3.000 \cdot 15,6268 = 46.880,5 \text{ дин.}$$

б) За период од 6 до 10 године није било улагања па је сума улога  $S_n$  на крају 6 године почетни капитал за наредно време од 4 године (без нових улагања) и треба га увећати фактором акумулације (помножити фактором првих таблица).



За  $S_n = K$  следи (води се и даље рачуна о томе да је капиталисање полугодишње):

$$K_n = K \cdot I_{4\%}^8 = (U \cdot III_{4\%}^{12}) \cdot I_{4\%}^8 = (3.000 \cdot 15,6268) \cdot 1,3686 = 64.160,65$$

Увећани капитал после 10 година је 64.160,65 дин.

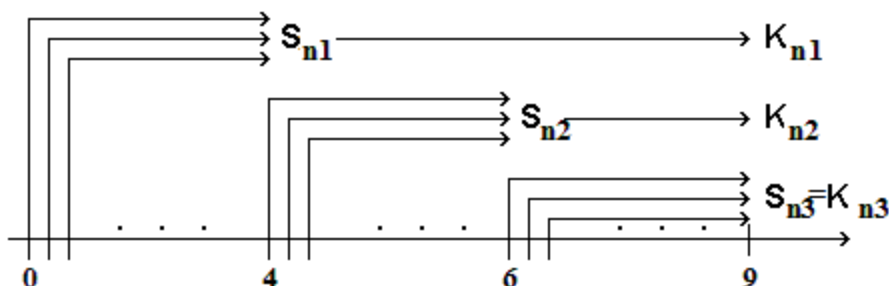
### Пример 3.

У банку се улаже почетком сваке године и то: прве 4 године по 2.000 динара, следеће 2 године по 4.000 динара и наредне 3 године по 5.000 дин. Каматна стопа је 6% ( $pa$ ) $d$ , а капиталисање годишње.

Одредити: а) Суму улога на крају 9 године; б) Садашњу (актуелну) вредност суме улога.

Решење:

а) Прво ћемо израчунати вредност сваке појединачне суме ове три групе улога на крају 9 године:



Вредност прве групе улога, за дато  $n_1=4$ ,  $U=2.000$  и  $p=6\%$ , на крају четврте године је:

$$S_{n1} = U \cdot III_{p\%}^{n1} = 2.000 \cdot III_{6\%}^4 = 2.000 \cdot 4,6371 = 9.274,2$$

А вредност те групе улога, за  $S_{n1} = K_1$ , на крају 9 године је:

$$K_{n1} = K_1 \cdot I_{6\%}^5 = 9.274,2 \cdot 1,3382 = 12.410,73$$

Вредност друге групе улога (од 4 до 6 године), за дато  $n_2=2$ ,  $U=4.000$  и  $p=6\%$ , на крају 6 године је:

$$S_{n2} = 4.000 \cdot III_{6\%}^2 = 4.000 \cdot 2,1836 = 8.734,4$$

А вредност те групе улога, за  $S_{n2} = K_2$ , на крају 9 године је:

$$K_{n2} = K_2 \cdot I_{6\%}^3 = 8.734,4 \cdot 1,1910 = 10.402,67$$

Вредност треће групе улога (од 6 до 9 године) је:

$$S_{n3} = 5.000 \cdot III_{6\%}^3 = 5.000 \cdot 3,3746 = 16.873$$

а како за  $S_{n3}$  нема времена укамаћивања првим таблицама јер је то сума улога на крају 9 године, онда је  $S_{n3} = K_{n3}$ . Вредност укупне суме улога на крају 9 године је сада збир вредности свих појединачних суме група улога доведених на рок краја 9 године, односно:

$$K_n = K_{n1} + K_{n2} + K_{n3} = 12.410,73 + 10.402,67 + 16.873 = 39.686,4$$



б) Садашња вредност  $K$  суме улога  $K_n$  добија се када се укупна сума улога  $K_n$  на крају 9 године дисконтује за време од 9 година, односно израчунава се тако што се вредност укупне суме улога помножи есконтним фактором (другим таблицама).

$$K = K_n \cdot I_{6\%}^9 = 39.686,4 \cdot 0,5919 = 23.490,38$$

### Антиципативни улози чешћи од капиталисања

Ако су улози чешћи од капиталисања и ако је  $m$  број улога  $U$  у обрачунском периоду почетком једнаких временских интервала, тада је:

$$S_{mn} = U_1(1 + III_{p\%}^{n-1}) \quad ; \quad \text{где је} \quad U_1 = U \left( m + \frac{p(m+1)}{200} \right).$$

#### Пример 4.

Улагано је почетком сваког полугодишта током 8 година по 1.000 динара у банку која плаћа 6% ( $pa$ )d камате и капиталише годишње. Израчунати суму улога на крају 15-те године.

Решење:

Овде је улагање чешће од капиталисања па је  $m = 2$  ;  $p = 6\%$  ;

$$U_1 = U \left( m + \frac{p(m+1)}{200} \right) = 1.000 \left( 2 + \frac{6(2+1)}{200} \right) = 1.000 \cdot 2,09 = 2.090$$

а даље је:

$$S_{mn} = U_1(1 + III_{p\%}^{n-1}) = 2.090(1 + III_{6\%}^{8-1}) = 20.685,71$$

$S_{mn}$  је сума улога на крају 8 године, па треба тај капитал увећати фактором акумулације за наредни период од 7 година. Тако је:

$$K = S_{mn} \cdot I_{6\%}^7 = 20.685,71 \cdot I_{6\%}^7 = 31.103,65$$



### Декурзивни улози

У случају да се тражи стање улога на дан последњег улагања или се улаже крајем периода улагања, за такво улагање кажемо да је **декурзивно**.

Ако је  $S'_n$  сума свих улога по  $U$  динара, уложених крајем обрачунских периода, заједно са припадајућим каматама, а  $n$  број улога, тада је:

$$S'_n = U \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}; \quad \text{односно} \quad S'_n = U \cdot (1 + III_{p\%}^{n-1});$$

### **Пример 5.**

Колико се мора улагати крајем сваке године у току 15 година уз 6% (pa)d и годишње капиталисање да би се на крају 15. године располагало са 20.000 дин.?

#### Решење:

Пошто се улаже крајем сваке године реч је о декурзивним улозима, па се полази од обрасца:

$$S'_n = U \cdot (1 + III_{p\%}^{n-1})$$

Уз дате услове,  $S'_n = 20.000$ ,  $n=15$  и  $p=6\%$  из датог обрасца следи:

$$U = \frac{S'_n}{(1 + III_{p\%}^{n-1})} = \frac{20.000}{1 + III_{6\%}^{15-1}} = \frac{20.000}{1 + 22,2760} = 859,25 \text{ дин.}$$

### **Пример 6.**

Улагано је током 15 година крајем сваке године по 10.000 дин. у банку која плаћа 2% (pa)d камате и капиталише годишње. Израчунати суму тих улога:

- на крају петнаесте године;
- годину дана после последњег улога.

#### Решење:

а) Пошто се улаже крајем сваке године у питању су декурзивни улози, па уз дате услове  $U=10.000$  дин.,  $p=2\%$  (па)д и  $n=15$ , следи:

$$S'_n = U \cdot (1 + III_{p\%}^{n-1}) = 10.000 \cdot (1 + III_{2\%}^{14}) = 10.000 \cdot (1 + 16,2934) = 172.934 \text{ дин.}$$

б)  $S'_n$  је сума улога на крају петнаесте године, тако да је потребно увећати тај капитал фактором акумулације за период од годину дана, односно,  $S'_n = K$

$$K_n = K \cdot I_{p\%}^n = 172.934 \cdot I_{2\%}^1 = 172.934 \cdot 1,0200 = 176.392,68 \text{ дин.}$$

### Пример 7.

Која је понуда повољнија за продавца:

- Први купац нуди 3.000 дин. после 3 године и 2.600 после 7 година.
- Други купац нуди крајем сваке године у наредних 7 година по 800 динара.

Каматна стопа је 6% (*pa*), а капиталисање годишње. Одредити која је понуда повољнија.

#### Решење:

Сведимо обе понуде на исти рок (рок данас).

- Прва понуда:

$$K_{n_1} = 3.000 \quad n_1 = 3 \quad p = 6\%$$

$$K_1 = K_{n_1} \cdot II_{6\%}^3 = 3.000 \cdot 0,8396 = 2.518,8$$

$$K_{n_2} = 2.600 \quad n_2 = 7 \quad p = 6\%$$

$$K_2 = K_{n_2} \cdot II_{6\%}^7 = 2.600 \cdot 0,6651 = 1.729,26$$

$$K = K_1 + K_2 = 2.518,8 + 1.729,26 = 4.248,06$$

- Друга понуда:

Пошто други купац нуди крајем сваке године извесну суму новца, у питању су декурзивни улози. Израчунаћемо их на следећи начин:

$$S'_n = 800(1 + III_{6\%}^{7-1}) = 800 \cdot (1 + 7,3938) = 6.715,04 .$$

Ово је сума улога после седам година улагања коју треба да сведемо на садашњи временски тренутак да би била упоредива са понудом првог купца.

Самим тим,  $S'_n = K_n$ , па је:

$$K = K_n \cdot II_{6\%}^7 = 6.715,04 \cdot 0,6651 = 4.466,17$$

Дакле, за продавца је повољнија *друга понуда* јер други купац нуди више.

### Декурзивни улози чешћи од капиталисања

Ако су улози чешћи од капиталисања и ако је  $m$  број улога  $U$  у обрачунском периоду крајем једнаких временских интервала, тада је:

$$S_{mm} = U_1 \cdot (1 + III_{p\%}^{n-1}) ; \quad \text{где је} \quad U_1 = U \cdot \left( m + \frac{p(m-1)}{200} \right) .$$

#### Пример 8.

Крајем сваког полугодишта током 12 година улаже се по 1.000 динара уз каматну стопу од 8% ( $pa$ ) и годишње капиталисање. Израчунати суму улога на крају 15-те године.

#### Решење:

Овде је улагање чешће од капиталисања па је  $m = 2$ ;  $p = 8\%$ ;

$$U_1 = U \left( m + \frac{p(m-1)}{200} \right) = 1.000 \left( 2 + \frac{8 \cdot (2-1)}{200} \right) = 1.000 \cdot 2,04 = 2.040$$

а даље је:

$$S_{mm} = U_1 (1 + III_{p\%}^{n-1}) = 2.040 \cdot (1 + III_{8\%}^{12-1}) = 2.040 \cdot 17,9771 = 38.713,28$$

$S_{mm}$  је сума улога на крају 12 године,  $S_{mm} = K$ , па треба тај капитал увећати фактором акумулације за наредни период од 3 године. Тако је:

$$K_n = K \cdot I_{8\%}^3 = 38.713,28 \cdot 1,2597 = 48.767,12$$

Др Наташа Папић-Благојевић, проф.

