ФАКТОР АКТУЕЛИЗАЦИЈЕ

Нека су U_1, U_2, U_3..., U_n одговарајући годишњи износи које или издајемо или примамао респективно крајем 1, 2, ..., n-те године уз p% годишњу декурзивну каматну стопу и годишње капиталисање. Заменимо ли ова издавања, односно примања једним улогом S_0 на почетку прве године, онда је на основу принципа еквиваленције:

$$S_0 = \frac{U_1}{r} + \frac{U_2}{r^2} + \ldots + \frac{U_n}{r^n}$$

или, ако је $U_1 = U_2 = \ldots = U_n = U$ и стопа p у интервалу од 0 до n константа, садашња вредност низа једнаких декурзивних улога од U динара је:

$$S_0 = U \cdot \frac{(r^n - 1)}{r^n (r-1)}$$

где је S_0 дисконтована вредност издавања или примања, а $\dfrac{r^n - 1}{r^n (r-1)}$ ***фактор актуелизације*** од 1 новчане јединице уз p% за n периода чија се вредност налази у IV таблицама сложеног каматног рачуна, па претходни израз можемо написати и као:

$$S_0 = U \cdot IV^n_{p\%}\ ; \qquad \text{где је} \qquad IV^n_{p\%} = \frac{r^n - 1}{r^n (r-1)}\ .$$

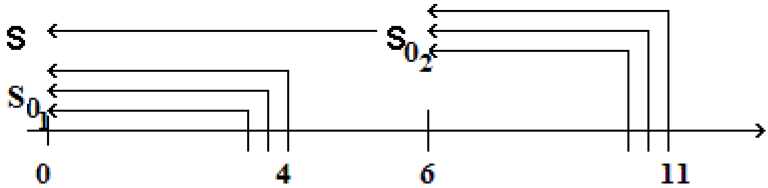
Четврте таблице се могу изразити и преко других таблица:

$$IV^n_{p\%} = \frac{100}{p}(1 - II^n_{p\%})$$

Пример 1.

Крајем сваке године улагано је у банку по 2.000 динара током 4 године. После 2 године, током којих није било улагања, настављено је са улагањем још 5 година. Одредити садашњу вредност укупног капитала, ако је каматна стопа 4%$(pa)d$, а капиталисање годишње.

Решење:



S_{0_2} је вредност низа декурзивних улога од шесте до једанаесте године доведених на почетак седме (крај шесте) године, па за дато U=2.000, n_2=5 и p=4% следи:

$$S_{0_2} = U \cdot IV_{p\%}^{n_2} = 2.000 \cdot IV_{4\%}^{5} = 2.000 \cdot 4,4518 = 8903,6$$

Сада је потребно капитал од S_{0_2} динара помножити есконтним фактором (другим таблицама) да би одредили садашњу вредност капитала:

$$S = S_{0_2} \cdot II_{4\%}^{6} = 8.903,6 \cdot 0,7903 = 7.036,52$$

Садашња вредност низа декурзивних улога који се улажу у прве 4 године је $S_{0,1}$, а како је то садашњи тренутак није потребно даље дисконтовати добијену вредност, па је:

$$S_{0_1} = U \cdot IV_{p\%}^{n_1} = 2.000 \cdot IV_{4\%}^{4} = 2.000 \cdot 3,6299 = 7.259,8$$

Садашња вредност укупног капитала је $S_0 = S + S_{0_1}$ односно:

$$S_0 = S + S_{0_1} = 7.036,52 + 7.259,8 = 14.296,32$$

Садашња вредност низа једнаких антиципативних улога од U динара је:

$$S_0{}' = U \frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}; \qquad \text{односно} \qquad S_0{}' = U \cdot (1 + IV_{p\%}^{n-1}) \;.$$

Пример 2.

Колико треба уложити у банку да би се у току следећих 5 година уз 3%$(pa)d$ и годишње капиталисање примило почетком сваке године по 10.000 динара почев од данас?

Решење:

Пошто се износи примају почетком сваке године, за дате услове n=5, p=3% и U=10.000, примењује се образац за одређивање садашње вредности низа једнаких антиципативних улога:

$$S_0' = U \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)} = 10.000 \cdot \frac{(1{,}03^5 - 1)}{1{,}03^{5-1}(1{,}03-1)} = 10.000 \cdot 4{,}717098 = 47.170{,}98 \text{ дин.}$$

Пример 3.

Током 10 година, уз $6\%(pa)d$ и годишње капиталисање, улагано је по 10.000 динара почетком сваке године. Који ће се износ примати на основу тих улагања почев од данас почетком сваке године током наредних 8 година?

Решење:

Пошто се улагања врше почетком сваке године, за дате услове n=10, p=6% и U=10.000, потребно је одредити суму антиципативних улога после десет година према обрасцу:

$$S_n = U \cdot III_{p\%}^{n}$$

Са друге стране, за услове n=8 и p=6%, потребно је одредити који ће се износ примати на основу тих улагања, за шта ће нам послужити образац за утврђивање садашње вредности низа једнаких антиципативних улога:

$$S_0' = U \cdot (1 + IV_{p\%}^{n-1})$$

Изједначавањем $S_n = S_0$, односно $U \cdot III_{p\%}^{n} = U \cdot (1 + IV_{p\%}^{n-1})$ следи:

$10.000 \cdot III_{6\%}^{10} = U \cdot (1 + IV_{6\%}^{8-1})$

$10.000 \cdot 13{,}9716 = U \cdot (1 + 5{,}5824)$

$13.971{,}6 = U \cdot 6{,}5824 \Rightarrow U = 21.225{,}69$ дин.

Пример 4.

Крајем сваке године током 6 година у банку се улаже по 3.000 динара, уз $8\%(pa)d$ и годишње капиталисање. Који ће се износ примати на основу тих улагања почев од данас крајем сваке године током наредних 7 година уз $4\%(pa)d$ и годишње капиталисање?

Решење:

Пошто се улагања врше крајем сваке године, за дате услове n=6, p=8% и U=3.000, потребно је одредити суму декурзивних улога после шест година према обрасцу:

$$S_n' = U \cdot (1 + III_{p\%}^{n-1})$$

Са друге стране, за услове n=7 и p=4%, потребно је одредити који ће се износ примати на крајем сваке године основу тих улагања, за шта ће нам послужити образац за утврђивање садашње вредности низа једнаких декурзивних улога:

$$S_0 = U \cdot IV_{p\%}^{n}$$

Изједначавањем $S_n^{'} = S_0$, односно $U \cdot (1 + III_{p\%}^{n-1}) = U \cdot IV_{p\%}^{n}$ следи:

$$3.000 \cdot \left(1 + III_{8\%}^{6-1}\right) = U \cdot IV_{4\%}^{7}$$

$$3.000 \cdot (1 + 6{,}3359) = U \cdot 6{,}0021$$

$$22.007{,}7 = U \cdot 6{,}0021 \Rightarrow U = \frac{22.007{,}7}{6{,}0021} = 3.666{,}67 \text{ дин.}$$

АМОРТИЗАЦИЈА ЗАЈМА

У економској науци реч кредит или зајам подразумева одређени дужничко-поверилачки однос заснован на уступању права располагања новцем или неким другим предметом од стране повериоца дужнику на одређено време и под одређеним условима.

Амортизовати неки зајам значи постепено га отплатити према унапред утврђеном плану амортизације. Начин отплаћивања зајма може бити различит. Тако се, на пример, зајам може амортизовати једнаким отплатама, али и отплатама које расту или опадају по геометријској односно аритметичкој прогресији, с тим да се интерес плаћа посебно. Сума која се плаћа о утврђеним роковима, а садржи у себи отплату и интерес назива се *ануитет*.

Амортизација зајма једнаким ануитетима у пракси је чешћа, а за дужника је такав начин отплаћивања зајма повољнији, пошто се терет амортизације зајма равномерно дели на цео период амортизације.

Основне претпоставке модела амортизације зајма једнаким ануитетима су:
а) обрачун камате је сложен и декурзиван;
б) ануитети су једнаки и доспевају у једнаким временским јединицама крајем обрачунског периода;
в) каматна стопа је константна у целом периоду амортизације зајма.

Зајам се амортизује једнаким ануитетима који се плаћају крајем сваког периода капиталисања, а израчунава се на следећи начин:

$$Z = a \cdot \frac{r^n - 1}{r^n (r-1)} \;; \qquad \text{или} \qquad Z = a \cdot IV_{p\%}^{n} \;;$$

где је Z- зајам, a - ануитет, n - број ануитета (број периода).

Ануитет се може израчунати на следећи начин:

$$a = Z \cdot \frac{r^n (r-1)}{r^n - 1} \;; \qquad \text{или} \qquad a = Z \cdot V_{p\%}^{n} \;;$$

где је $\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1}$ *ануитетни фактор* или *фактор повраћаја* чија се вредност налази у петим таблицама сложеног каматног рачуна, па је:

$$\frac{r^n(r-1)}{r^n-1} = V_{p\%}^n$$

Из чега се види да је пета таблица реципрочна вредност четврте таблице, односно:

$$V_{p\%}^n = \frac{1}{IV_{p\%}^n}$$

Израда амортизационог плана

Амортизациони план садржи колоне за периоде отплаћивања (n), зајам на самом почетку периода задуживања (Z), односно остатак дуга R_{n-c}, интерес (i) и отплату (b).

Уколико се пође од претпоставке да се зајам амортизује n година једнаким годишњим ануитетима са $p\%(pa)d$ уз годишње капиталисање, тада следи:

n	Износ дуга	i	b
1	Z	$i_1 = \frac{Z \cdot p}{100}$	$b_1 = a - i_1$
2	$R_{n-1} = Z - b_1$	$i_2 = \frac{R_{n-1} \cdot p}{100}$	$b_2 = a - i_2$
3	$R_{n-2} = R_{n-1} - b_2$	$i_3 = \frac{R_{n-2} \cdot p}{100}$	$b_3 = a - i_3$
…	…	..	…
n	$R_1 = R_2 - b_{n-1}$	$i_n = \frac{R_1 \cdot p}{100}$	$b_n = a - i_n$

Сматра се да је амортизациони план тачно израђен:

1) уколико су последњи остатак дуг и последња отплата једнаки, $R_1 = b_n$;
2) ако је збир свих отплата једнак зајму:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = Z; \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i = Z$$

3) ако је сума свих интереса једнака интересу који се израчунава на збир колоне “износ дуга”

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_n = \frac{(Z + R_{n-1} + R_{n-2} + R_1) \cdot p}{100}$$

Пример 1.

Који се зајам амортизује једнаким полугодишњим ануитетима од 10.000 дин. у току 10 година са 6%$(pa)d$ и уз полугодишње капиталисање?

Решење:

Пошто је капиталисање полугодишње, следи да је n = 10·2=20; p=6%/2= 3%; а ануитет је a = 10.000. На основу тога се може израчунати и износ зајма:

$$Z = a \cdot \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)} = 10.000 \cdot \frac{1{,}03^{20} - 1}{1{,}03^{20}(1{,}03-1)} = 10.000 \cdot 14{,}8775 = 148.775 \text{ или}$$

$$Z = a \cdot IV_{p\%}^{n} = 10.000 \cdot IV_{3\%}^{20} = 10.000 \cdot 14{,}8775 = 148.775 \text{ дин.}$$

Пример 2.

Зајам од 100.000 дин. амортизује се 10 година једнаким годишњим ануитетима са 6%$(pa)d$ и уз годишње капиталисање. Израчунати ануитет.

Решење:

Z = 100.000; n = 10; p = 6%;

$$a = Z \cdot \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} = 100.000 \cdot \frac{1{,}06^{10}(1{,}06-1)}{1{,}06^{10} - 1} = 100.000 \cdot 0{,}1359 = 13.590 \text{ или}$$

$$a = Z \cdot V_{p\%}^{n} = 100.000 \cdot V_{6\%}^{10} = 100.000 \cdot 0{,}1359 = 13.590 \text{ дин.}$$

Пример 3.

Зајам се амортизује 3 године једнаким годишњим ануитетима од 10.000 динара уз 3%$(pa)d$ камате и годишње капиталисање. Направити амортизациони план и извршити проверу.

Решење: $a = 10.000$; $p = 3\%$; $n = 3$

$$Z = a\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)} = 10.000 \cdot \frac{1{,}03^{3} - 1}{1{,}03^{3}(1{,}03-1)} = 10.000 \cdot 2{,}828611 = 28.286{,}11$$

n	Износ дуга	i	b
1	28.286,11	848,58	9.151,42
2	19.134,69	574,04	9.425,96
3	9.708,73	291,26	9.708,74
Σ	57.129,53	1.713,88	28.286,12

$$i_1 = \frac{Z \cdot p}{100} = \frac{28.286,11 \cdot 3}{100} = 848,58 \;;$$

$$b_1 = a - i_1 = 10.000 - 848,58 = 9.151,42 \;;$$

$$R_{n-1} = R_2 = Z - b_1 = 28.286,11 - 9.151,42 = 19.134,69$$

$$i_2 = \frac{R_2 \cdot p}{100} = \frac{19.134,69 \cdot 3}{100} = 574,04$$

$$b_2 = a - i_2 = 10.000 - 574,04 = 9.425,96 \;;$$

$$R_{n-2} = R_1 = R_2 - b_2 = 19.134,69 - 9.425,96 = 9.708,73$$

$$i_3 = \frac{R_1 \cdot p}{100} = \frac{9.708,73 \cdot 3}{100} = 291,26$$

$$b_3 = a - i_3 = 10.000 - 291,26 = 9.708,74$$

Провера обухвата три елемента, којима се потврђује тачност израђеног амортизационог плана:

1) $R_1 = b_{\mathrm{n}};\qquad 9.708,73 \cong 9.708,74$

2) $\sum_{i=1}^{3} b_i = \mathrm{Z};\qquad 28.286,12 \cong 28.286,11$

3) $\sum_{i=1}^{3} i_i = \frac{(Z + R_2 + R_1) \cdot p}{100};$

$1.713,88 = \frac{57.129,63 \cdot 3}{100};$

$1.713,88 \cong 1.713,89.$

На основу извршене провере, може се закључити да је амортизациони план тачно израђен.

КОНВЕРЗИЈА ЗАЈМА

У случају да се у току амортизације зајма промени или време амортизације или интересна стопа или се промене и време амортизације и интересна стопа, каже се да је наступила *конверзија зајма*.

До конверзије зајма најчешће долази пристанком повериоца на предлог дужника, коме конверзија омогућује плаћање мањег ануитета, а тиме и боље услове отплаћивања зајма. Конверзија зајма се може предвидети и самим уговором о зајму, мада до конверзије може доћи и услед промене прилика на новчаном тржишту.

Последица конверзије зајма је промена ануитета. Битан елемент за одређивање новог ануитета је одређивање дуга (остатка дуга) на дан конверзије зајма. Износ остатка дуга се третира као нови зајам који треба да се амортизује под новим условима.

За конверзију зајма су карактеристична два случаја:

а) Ако се конверзија поклапа са даном плаћања ануитета, тада је остатак дуга R_{n-c}, а нови ануитет:

$$a_1 = R_{n-c} \cdot V_{p_1\%}^{n-c+k}$$

где је $p_1\%$ нова каматна стопа, c ознака плаћеног ануитета, а k време продужења амортизације.

Пример 4.

Зајам од 100.000 динара амортизује се једнаким годишњим ануитетима са $6\%(pa)d$ камате и годишње капиталисање у току 20 година. После дванаестог плаћеног ануитета време отплаћивања зајма се продужава за 10 година, а каматна стопа се смањује за 2%. Одредити нови ануитет.

Решење:

У првом кораку израчунава се остатак дуга на дан промене услова отплаћивања зајма, према првобитним условима, па на основу израчунатог остатка дуга рачунамо нови анитет према новим условима.

За дато $Z = 100.000;\quad n = 20;\quad p = 6\%;\quad m = 1;$

потребно је израчунати $R_{n-c} = a \cdot IV_{p\%}^{n-c}$, а за то је потребно одредити ануитет, па је:

$$a = Z \cdot V_{p\%}^{n} = 100.000 \cdot V_{6\%}^{20} = 100.000 \cdot 0{,}0872 = 8.720$$

Пошто је до промене услова отплаћивања зајма дошло после дванаестог плаћеног ануитета, односно c=12, даље следи:

$$R_{n-c} = a \cdot IV_{6\%}^{20-12} = 8.720 \cdot 6{,}2098 = 54.149{,}46$$

На крају, за $p_1 = 6\%$ и $k = 2$, следи да је нови ануитет:

$$a_1 = R_{n-c} \cdot V_{p_1\%}^{n-c+k} = 54.149{,}46 \cdot V_{4\%}^{20-12+10} = 54.149{,}46 \cdot 0{,}0790 = 4.277{,}81$$

б) Ако конверзија наступа извесно време после c-тог плаћеног ануитета, онда треба остатку дуга R_{n-c} додати и камату за то извесно време, па тако коригован остатак дуга $R_{n-c}^{'}$ је нови зајам помоћу ког се одређује и нови ануитет:

$$a_1 = R_{n-c}^{'} \cdot V_{p_1\%}^{n_1}$$

где је $p_1\%$ нова каматна стопа, c ознака плаћеног ануитета, а n_1 ново време отплате преосталог дуга.

Пример 5.

Зајам од 300.000 динара амортизује се 18 година једнаким годишњим ануитетима уз каматну стопу 6%$(pa)d$ и годишње капиталисање. Четири месеца по исплати осмог ануитета странке су се договориле да се интересна стопа смањи за 1%, а дужник се обавезао да ће остатак дуга отплатити у наредних 12 година једнаким годишњим ануитетима. Израчунати нови ануитет.

Решење:

Да бисмо израчунали нови ануитет a_1 прво морамо да израчунамо остатак дуга на дан промене услова. Значи, прво одредимо остатак дуга после 8 плаћених ануитета, а пре тога одредимо ануитет којим се зајам почео амортизовати:

$$Z = 300.000; \qquad n = 18; \qquad p = 6\%; \qquad c = 8;$$

$$a = Z \cdot V_{p\%}^{n} = 300.000 \cdot V_{6\%}^{18} = 300.000 \cdot 0{,}0924 = 27.720$$

Сада је остатак дуга на дан осмог плаћеног ануитета:

$$R_{n-c} = a \cdot IV_{6\%}^{18-8} = 27.720 \cdot 7{,}3601 = 204.021{,}972$$

На овај остатак дуга је потребно додати камату за четири месеца и на тај начин добијамо увећани остатак дуга $R_{n-c}^{'}$, односно:

$$R_{n-c}^{'} = R_{n-c} + i; \qquad \text{где је } i = \frac{R_{n-c} \cdot p \cdot m}{1200} = \frac{204.021{,}972 \cdot 6 \cdot 4}{1200} = 4.080{,}44$$

Отуда:

$$R_{n-c}^{'} = R_{n-c} + i = 204.021{,}972 + 4.080{,}44 = 208.102{,}41$$

па је, за дато $п_1$=5% и $н_1$=12, нови ануитет:

$$a_1 = R'_{n-c} \cdot V^{n_1}_{p_1\%} = 208.102,41 \cdot V^{12}_{5\%} = 208.102,41 \cdot 0,1128 = 23.473,95$$

Др Наташа Папић-Благојевић, проф