



ПРИПРЕМА ЗА КОЛОКВИЈУМ

1. Дужник треба да плати фактуре на следеће износе:

- 8.000 дин 2.4. уз каматну стопу од 4%
- 12.000 дин 6.5. уз каматну стопу од 8%
- 20.000 дин 16.7. уз каматну стопу од 7%

Дужник би хтео да плати цео дуг одједном сумом износа на фактурама и то:

- а) по непромењеним условима;
- б) уз каматну стопу од 6% за све суме ($k, 360$).

Када је то могуће учинити?

Решење:

а) У овом примеру потребно је одредити средњи рок плаћања у случају када су различити капитали, различито време и различита каматна стопа. За референтни ниво се узима датум 2. април.

У том случају средњи рок плаћања се израчунава на основу следећег обрасца:

$$d_s = \frac{\sum_{k=1}^n K_k \cdot p_k \cdot d_k}{\sum_{k=1}^n K_k \cdot p_k}$$

Формирамо табелу:

K	p	d	$K \cdot p$	$K \cdot p \cdot d$
8.000	4%	0	32.000	0
12.000	8%	34	96.000	3.264.000
20.000	7%	105	140.000	14.700.000
$\sum K = 40.000$			$\sum K \cdot p = 268.000$	$\sum Kpd = 17.964.000$

Пошто се време рачуна по календару, уз претпоставку да година има 360 дана, а за референтни ниво се узима прво доспеће, 2.4, онда је $d_1 = 0$. Следи да је $d_2 = 28 + 6 = 34$, а $d_3 = 28 + 31 + 30 + 16 = 105$.

Затим рачунамо средњи рок плаћања:

$$d_s = \frac{17.964.000}{268.000} = 67,03 \approx 67$$

На основу израчунатог закључујемо да се обавезе могу измирити сумом износа на фактурама 67. дана после датума епохе (референтног нивоа), односно 8. јуна.

б) У овом делу потребно је одредити средњи рок плаћања у случају када су различити капитали, различито време и иста каматна стопа. За референтни ниво узима поново се датум 2. април.

У том случају средњи рок плаћања се израчунава на основу следећег обрасца:

$$d_s = \frac{\sum_{k=1}^n K_k \cdot d_k}{\sum_{k=1}^n K_k}$$

У претходну табелу додајемо још једну колону:

K	d	$K \cdot d$
8.000	0	0
12.000	34	408.000
20.000	105	2.100.000
$\sum K = 40.000$		$\sum K \cdot p = 2.508.000$

Па израчунавамо:

$$d_s = \frac{2.508.000}{40.000} = 62,7 \approx 63$$



Закључујемо да се обавезе одједном могу измирити сумом износа на фактурама 63. дана после датума епохе (референтног нивоа), односно 4. јуна.

2. Четири менице номиналне вредности 14.000, 16.500, 18.200 и 21.400 дин и роковима доспећа (данима валуте) 8, 11, 15 и 16 дана замењујемо једном меницом чији је рок доспећа 22 дана. Израчунати номиналну вредност пете менице, ако је есконтна стопа 3%. Обрачун извршити комерцијалном методом.

Решење:

Збир есконтованих вредности познатих меница мора бити једнак есконтованој вредности непознате менице (есконтовање се врши на дан замене меница), односно:

$$K_{0_5} = K_{0_1} + K_{0_2} + K_{0_3} + K_{0_4}$$

Познате су следеће вредности:

$$\begin{aligned} Kn_1 &= 14.000 & Kn_2 &= 16.500 & Kn_3 &= 18.200 & Kn_4 &= 21.400 \\ n_1 &= 8 & n_2 &= 11 & n_3 &= 15 & n_4 &= 16 \\ D &= \frac{36.000}{3} = 12.000 & p &= 3\% \end{aligned}$$

На основу познатих номиналних вредности меница, могуће је израчунати њихове есконтоване вредности:

$$K_{0_1} = \frac{K_{n_1}(D - n_1)}{D} = \frac{14.000 \cdot (12.000 - 8)}{12.000} = 13.990,67$$

$$K_{0_2} = \frac{K_{n_2}(D - n_2)}{D} = \frac{16.500 \cdot (12.000 - 11)}{12.000} = 16.484,88$$

$$K_{0_3} = \frac{K_{n_3}(D - n_3)}{D} = \frac{18.200 \cdot (12.000 - 15)}{12.000} = 18.177,25$$

$$K_{0_4} = \frac{K_{n_4}(D - n_4)}{D} = \frac{21.400 \cdot (12.000 - 16)}{12.000} = 21.371,47$$



Есконтована вредност пете менице је:

$$K_{0_5} = K_{0_1} + K_{0_2} + K_{0_3} + K_{0_4} = 70.024,26$$

Из есконтоване вредности пете менице K_{0_5} треба одредити њену номиналну вредност K_{n_5} за $n_5 = 22$:

$$K_{0_5} = \frac{K_{n_5}(D - n_5)}{D} \Rightarrow K_{n_5} = \frac{D \cdot K_{0_5}}{D - n_5}$$

$$K_{n_5} = \frac{70.024,26 \cdot 12.000}{12.000 - 22} = 70.152,87$$

Према томе, номинална вредност пете менице је 70.152,87 динара.

3. Почетком сваке године у банку се улаже по 3.100 дин током 7 година. После 4 године, током којих није било улагања, настављено је са улагањем још 3 године. Одредити садашњу вредност укупног капитала ако је каматна стопа 4%, а капиталисање годишње.

Решење:

У примеру су нам познате следеће вредности: $U=3.100$ и $p=4\%$. Пошто је потребно одредити садашњу вредност укупног капитала, а улагања се врше почетком године, користи се образац за израчунавање садашње вредности низа једнаких антиципативних улога. Задатак се може решити и преко обрасца за израчунавање суме антиципативних улога и сасвим је свеједно који ће се, од наведена два поступка, применити.

Прво се рачуна садашња вредност низа једнаких антиципативних улога за првих седам година, тако да је $n_1=7$, па следи:

$$S'_{0_1} = U \cdot (1 + IV_{4\%}^{7-1}) = 3.100 \cdot (1 + 5,2421) = 19.350,51$$

Пошто је ово садашња вредност низа једнаких антиципативних улога у тренутку данас следи да је:

$$S'_{0_1} = K_1$$

Током четири године није било улагања, па тај период привремено занемарујемо, али узимамо у обзир да је улагање настављено и да је трајало још 3 године. Значи, $n_2=3$, па следи:

$$S_{0_2}' = U \cdot (1 + IV_{4\%}^{3-1}) = 3.100 \cdot (1 + 1,8861) = 8.946,91$$

Овај износ нам сада представља садашњу вредност низа једнаких антиципативних улога, али на почетку 11 године (7 година првих улагања + 4 године када није било улагања), па следи да је:

$$S_{0_2}' = Kn_2$$



Пошто овај износ третирамо као крајњу вредност капитала, потребно је израчунати колика је та вредност у тренутку данас, односно почетни капитал за $n=11$, па следи:

$$K_2 = K_{n_2} \cdot II_{4\%}^{11} = 8.946,91 \cdot 0,6496 = 5.811,91$$

На крају, садашња вредност укупног капитала је:

$$K = K_1 + K_2 = 25.162,42$$

4. Крајем сваке године врши се улагање у банку и то: прве три године по 4.200 дин, наредне две године по 2.700 дин и следећих шест по 3.800 дин. Каматна стопа је 3% (*pa*)*d*, а капиталисање годишње. Одредити суму улога на крају 11 године.

Решење:

а) Пошто се улагања врше крајем сваке године, за израчунавање тражене суме улога користи се образац за декурзивне улоге.

Прво ћемо израчунати вредност сваке појединачне суме ове три групе улога на крају 11 године.

I: Вредност прве групе улога, за дато $n_1=3$, $U_1=4.200$ и $p=3\%$, на крају четврте године је:

$$S_{n_1}' = U_1 \cdot (1 + III_{3\%}^{3-1}) = 4.200 \cdot (1 + 2,0909) = 12.981,78$$

Пошто је ово сума улога на крају треће године, потребно је израчунати вредност ове суме на крају 11 године. Из тога произилази да је $S'_{n_1} = K_1$, па је за $n=8$ вредност ових улога на крају 11 године је:

$$K_{n_1} = K_1 \cdot I_{3\%}^8 = 12.981,78 \cdot 1,2668 = 16.445,32$$

II: Вредност друге групе улога (од 3 до 5 године), за дато $n_2=2$, $U_2=2.700$ и $p=3\%$, на крају 5 године је:

$$S'_{n_2} = U_2 \cdot (1 + III_{3\%}^{2-1}) = 2.700 \cdot (1 + 1,0300) = 5.481$$

Пошто је ово сума улога на крају пете године, потребно је израчунати вредност ове суме на крају 11 године. Из тога произилази да је $S'_{n_2} = K_2$, па је за $n=6$ вредност ових улога на крају 11 године је:

$$K_{n_2} = K_2 \cdot I_{3\%}^6 = 5.481 \cdot 1,1941 = 6.544,86$$

III: Вредност треће групе улога (од 5 до 11 године), за дато $n_3=6$, $U_3=3.800$ и $p=3\%$ је:

$$S'_{n_3} = U_3 \cdot (1 + III_{3\%}^{6-1}) = 3.800 \cdot (1 + 5,4684) = 24.579,92$$

а како за S'_{n_3} нема времена укамаћивања првим таблицама јер је то сума улога на крају 11 године, онда је $S'_{n_3} = K_{n_3}$. Вредност укупне суме улога на крају 11 године је сада збир вредности свих појединачних сума група улога доведених на крај 11 године, односно:

$$K_n = K_{n_1} + K_{n_2} + K_{n_3} = 16.445,32 + 6.544,86 + 24.579,92 = 47.570,10$$

- 5.** Зајам од 120.000 дин амортизује се 6 година једнаким полугодишњим ануитетима уз 8% (*pa*)d и полугодишње капиталисање. После три године плаћања ануитета, уговорне стране су се договориле да се отплаћивање продужи за пет година, а каматна стопа смањи за 2%. Одредити нови ануитет.

Решење:

У примеру у ком је дошло до промене услова отплаћивања зајма, лако закључујемо да је у питању конверзија зајма. Пошто се време промене услова и време плаћања ануитета временски поклапају, констатујемо да је у питању први случај.

Прво што уочавамо јесте да је капиталисање полугодишње, односно $m = 2$, па ће се то одразити на број периода и декурзивну каматну стопу. У првом кораку израчунава се остатак дуга на дан промене услова отплаћивања зајма, према првобитним условима, односно за дато:

$$Z = 120.000 \quad n = 6 \cdot 2 = 12 \quad p = 8\%/2 = 4\%$$

потребно је израчунати $R_{n-c} = a \cdot IV_{p\%}^{n-c}$. Да бисмо израчунали остатак дуга, потребно је одредити ануитет на основу познатог зајма, па је:

$$a = Z \cdot V_{p\%}^n = 120.000 \cdot V_{4\%}^{12} = 120.000 \cdot 0,1066 = 12.792$$



До промене услова отплаћивања зајма дошло је после три године плаћања ануитета, односно $c=3 \cdot 2=6$ (и на овај износ делује полугодишње капиталисање), па даље следи:

$$R_{n-c} = a \cdot IV_{4\%}^{12-6} = 12.792 \cdot 5,2421 = 67.056,94$$

На основу израчунатог остатка дуга рачунамо нови ануитет према новим условима за $p_1 = 8\% - 4\% = 4\%/2 = 2\%$ и $k = 5 \cdot 2 = 10$; следи да је нови ануитет:

$$a_1 = R_{n-c} \cdot V_{p_1\%}^{n-c+k} = 67.056,94 \cdot V_{2\%}^{12-6+10} = 67.056,94 \cdot 0,0737 = 4.942,10$$

На крају закључујемо да је нови ануитет нижи од првобитно утврђеног ануитета, што је и смисао конверзије зајма.

Напомена: Ово су само неки од примера задатака који се могу појавити на колоквијуму. Сви сложенији задаци које смо вежбали такође долазе у обзир. Срећан рад! 😊

Др Наташа Папић-Благојевић, проф.