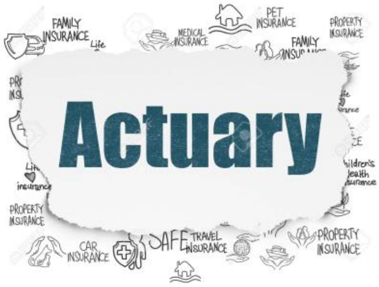

АКТУАРСКА МАТЕМАТИКА[1]

Актуарска математика је грана примењене математике која обрађује математичке основе осигурања.

Од краја 17. века захваљујући достигнућима математике и статистике, пре свега открићем Закона великих бројева и рачуна вероватноће уопште, створене су претпоставке модерног осигурања. Модерно осигурање функционише на принципима економски рационалног пословања, које се испољава кроз обезбеђење непосредне и пуне надокнаде штете. То се постиже применом научних метода заснованих на теорији вероватноће и Закону великих бројева, односно коришћењу математичко-статистичких и актуарских метода.

Стручњаци који се баве израчунавањем премија (тарифа) у осигурању називају се актуари. Актуари су раније водили рачуна и о актима осигуравајућих компанија, па одатле и потиче њихов назив. По актуарима је и математика осигурања названа актуарска математика.

Према Закону о осигурању[2] овлашћени актуар је лице које је добило овлашћење Народне банке Србије за обављање актуарских послова. Услове за стицање звања овлашћеног актуара прописује Народна банка Србије.

У Народној банци Србије полаже се испит за добијање лиценце овлашћеног актуара Републике Србије. Стручни испит за стицање звања овлашћеног актуара састоји се из следећих нивоа:

- ниво 1: основи примене актуарске математике у области осигурања, пензијских планова и инвестиција;
- ниво 2: модели управљања ризиком и неживотно осигурање;
- ниво 3: животно и здравствено осигурање;
- ниво 4: пензијски планови и моделирање;
- ниво 5: инвестиције и финансијско извештавање.

[1] **Напомена**: Теоријски делови су информативног карактера. Требаих прочитати ради лакшег разумевања појмова који ће се надаље изучавати.

[2] Закон о осигурању („Службени гласник РС“, бр. 139/2014)

Актуар је по образовању математичар, стручњак за рачун вероватноће који се користи статистичким подацима и на основу њих даје финансијска предвиђања у области осигурања, амортизације и сл.

Место актуара је у дирекцијама банака, осигуравајућих друштава и уопште у свим финансијским службама. То није књиговођа који прави биланс, него калкулатор који тачно одређује могуће резултате неке финансијске операције, водећи рачуна о ризику. Зарада или губици зависе од тога да ли је он све тачно сагледао и прорачунао.

Овлашћени актуар независан је и самосталан у вршењу послова. Овлашћени актуар дужан је да обавља своју делатност у складу са законом и правилима актуарске струке, добрим пословним обичајима и пословном етиком.

Према Закону о осигурању „овлашћени актуар даје мишљење о: 1) начину утврђивања премија; 2) начину утврђивања техничких резерви; 3) актима пословне политике; 4) финансијским извештајима и годишњем извештају о пословању друштва за осигурање; 5) извештају о спровођењу политике саосигурања и реосигурања; 6) преносу портфеља осигурања“.

У Републици Србији је 31.01.2002. год. основано Удружење актуара Србије[3] са циљем развоја и унапређења актуарске науке и струке осигурања. Удружење је посвећено примени актуарске науке у пракси, образовању актуара и бризи о јавном интересу. Удружење је 2007. године примљено у Међународно удружење акутара (енгл. *International Actuarial Association*) као пуноправни члан.

UDRUŽENJE AKTUARA SRBIJE

[3] http://www.aktuar.rs

АКТУАРСКЕ ОСНОВЕ ОСИГУРАЊА

Актуарска математика дели се на актуарску математику имовинског осигурања и актуарску математику личног осигурања. Предмет изучавања актуарске математике личног осигурања је обрачун тарифа животног осигурања, а обрачун тарифа имовинског осигурања је предмет изучавања актуарске математике имовинског осигурања.

Актуарство је примењена математика и математичка статистика у осигурању и бави се проценама и квантификацијама ризика, описује и систематизује нумеричке карактеристике ризика. Актуарски задаци се решавају применом општих математичко-статистичких метода, као и специјалних метода које се примењују искључиво у осигурању.

Као и у статистици, за актуарство посебан значај имају резултати истраживања варијација различитих појава, које називамо осигураним случајевима. Актуарство истражује и проналази начине и методе да податке који су од значаја за односе осигурања повеже у математичке релације.

Актуарска математика је уско повезана са финансијском математиком, пошто уважава концепт временске вредности новца, односно заснива се на капитализацији (укамаћивању). Такође, основни принцип финанасијске математике по коме је збир свих уплата сведених на исти временски тренутак једнак збиру свих исплата сведених на тај временски тренутак, представља и основни принцип актуарске математике.

Основна и битна разлика између финансијске и актуарске математике састоји се у томе што су рачуни финансијске математике независни од живота и старости лица, док рачуни актуарске математике зависе од старости лица.

Код решавања проблема осигурања живота веома је важно водити рачуна о једној непознатој величини - *часу смрти*, због чега актуарски обрачуни постају компликованији. Међутим, захваљујући једном природном закону, Закону великих бројева, актуарски обрачуни и поред постојања непознате величине дају задовољавајуће резултате.

Тешкоће у предвиђању наступања осигураних догађаја су проблеми које актуарска математика успешно решава користећи не само Закон великих бројева, већ и рачун вероватноће, који су омогућили да се као помоћно средство формирају тзв. Таблице смртности и Комутативни бројеви.

Закон великих бројева

Закон великих бројева је основни закон у теорији вероватноће и статистици. Формулисао га је швајцарски математичар Јакоб Бернули, а касније га је уоштио Симеон Денис Пуасон. Разликујемо две врсте појава: спорадичне (случајне, не постоји законитост њиховог дешавања) и појаве чија се законитост не може утврдити у малом броју реализација, већ само у маси, односно у великом броју опсервација.

Суштина Закона великих бројева је у томе да се, уколико се посматра велики број случајева, уочавају одређене правилности у наступању једног догађаја. При томе, што је број посматраних случајева већи, правилност јаче долази до изражаја, а одступања су мања. Ако се одређени догађај посматра појединачно, он представља случај, а у великом броју посматрања постаје законитост.

Законитост се испољава само у маси случајева и није видљива код појединачних јединица од којих је маса састављена, нити делује код малих група. На пример, уколико је од 20 људи одређене старости њих 10 умрло, то не значи да је вероватноћа смрти за људе те старости 50%. Међутим, посматрање групе од нпр. 60.000 људи исте старости може резултирати у формирању вероватноће смрти лица посматране старости.

У осигурању Закон великих бројева има велики значај, зато што за осигуравача не постоји неизвесност за укупан број покривених ризика него правилност и законитост. Исто тако са већим бројем осигураних предмета у маси је већа могућност тачнијег предвиђања будућих осигураних случајева, а тиме и будућих обавеза, на основу чега се одређују средства за њихово покриће.

Теорија вероватноће

Теорија вероватноће представља математичко-статистичку основу савременог осигурања, а заједно са Законом великих бројева је одиграла кључну улогу у развоју модерног осигурања. Захваљујући теорији вероватноће и њеној примени у осигурању, несрећни случајеви се више не сматрају судбински предодређеним и непредвидивим, већ се на њих гледа као на појаве које се захваљујући извесним правилностима могу предвиђати.

Основни појам у теорији вероватноће је догађај, који можемо дефинисати као резултат неког експеримента или опсервације.

Да би осигурање успешно извршавало своје функције, неопходно је одредити вероватноћу наступања економски штетних догађаја код различитих осигураних објеката и лица, да би се на основу тога утврдила премија осигурања. Премија је цена за осигурање које продаје осигуравајуће друштво.

Степен вероватноће настајања осигураног случаја је елеменат који одређује цену ризика. Уколико је вероватноћа наступања штетног догађаја већа, ризик је „лошији“ и премија је већа. Уколико је вероватноћа наступања штетног догађаја мања и премија је нижа, тада је ризик бољи. Успостављање једнакости између нето премија и ризика које те премије треба да покрију, реализоваће се теоријом вероватноће кроз закон великих бројева.

Таблице смртности

Познавање рачуна вероватноће је омогућило да се формирају тзв. *Таблице смртности*[4] које служе као техничка основа за формирање тарифа у осигурању живота. Таблице смртности заједно са каматном стопом представљају рачунску основу за израчунавање нето премија, то јест премија које треба да су довољне за покриће обавеза осигуравајућег завода према осигураницима.

Осигурање живота се заснива на таблицама смртности. Ако се зна колико лица одређене почетне старости једне државе или покрајине, годишње умре, онда се та лица могу осигурати за случај смрти или доживљења.

Прве таблице смртности саставио је енглески астроном Halley 1693. године. После њега, питањем таблица смртности бавила су се осигуравајућа друштва користећи своја искуства. Најпознатије таблице су:

- Deparcienx таблице издате 1746. год;
- Duvillard-ове таблице објављене 1806. год;
- Таблице 17 енглеских друштава од 1843. год;
- Таблице 20 енглеских друштава од 1869, састављене на основу искуства 20 енглеских друштава и садрже четири таблице: Таблице за мушке осигуранике, Таблице за женске осигуранике, Комбиноване таблице за мушке и женске осигуранике и Таблице за мушке и женске осигуранике који нису били потпуно здрави при ступању у осигурање.

У пракси, многа осигуравајућа друштва да би се заштитила од дејства неповољних одступања узимала су старије таблице са већом смртношћу, па се на тај начин аутоматски повећавала премија за осигурање живота.

Из наведених разлога се захтева да све осигуравајуће компаније приликом обрачуна користе последње објављене таблице смртности од стране Републичког завода за статистику.

У таблицама смртности са $\boldsymbol{x}$ је означена старост лица, са $\boldsymbol{l_x}$ број живих лица старих x година, са $\boldsymbol{d_x}$ број умрлих лица у току $(x+1)$ године старости, тј. број лица која су преживела x-ту годину, али нису доживела $(x+1)$ годину старости.

[4] http://www.vps.ns.ac.rs/wp-content/uploads/2020/02/TABLICE-SMRTNOSTI-.pdf

ОСИГУРАЊЕ ЈЕДНОГ ЛИЦА

Вероватноћа живота и смрти једног лица

Нека су l_x , l_{x+1} , l_{x+2} ,..., l_{x+n} ознаке за број живих лица старих x, x+1, x+2, ..., x+n година. Из таблица смртности се види да је:

$$l_x > l_{x+1} > l_{x+2} > \ldots > l_{x+n}.$$

Нека је даље d_x ознака за број лица која умру у току (x+1) –ве године, односно између пуних пуних x и x+1 година.

Уочава се да је:

$$d_x = l_x - l_{x+1} \Rightarrow l_{x+1} = l_x - d_x$$

Користећи рачун вероватноће даље закључујемо да је вероватноћа да ће лице старо x година доживети (x+n) година:

$$_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Вероватноћа да лице старо x година неће доживети x+1 годину, тј. да ће умрети у току (x+1)-ве године старости је:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - p_x$$

Приметимо да из овога следи:

$$p_x + q_x = 1$$

где је:

p_x– вероватноћа да ће лице доживети одређене године живота;

q_x - вероватноћа да лице неће доживети одређене године живота.

Вероватноћа да лице старо x година неће доживети x+n година је:

$$_{|n} q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$_{|n} q_x = 1 - {}_n p_x$$

Одавде следи да је:

$$_n p_x + {}_{|n} q_x = 1$$

Пример 1.

Колика је вероватноћа да ће лице старо 45 година:

а) доживети 50 година живота;

б) умрети пре него што наврши 50 година.

Решење:

а) Пошто са x означавамо старост лица, закључујемо да је x=45, а пошто је x+n=50 следи да је n=5. На основу познатих величина рачунамо вероватноћу доживљења.

У првој колони таблица смртности са x је означена старост лица, а у другој колони l_x број лица старих x година. Следи:

$$_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$_5p_{45} = \frac{l_{45+5}}{l_{45}} = \frac{l_{50}}{l_{45}} = \frac{69.517}{74.435} = 0{,}9339$$

Закључујемо да је вероватноћа да лице старо 45 година доживи 50 година 93,39%

б) На основу израчунате вероватноће доживљења, лако се израчунава вероватноћа да лице неће доживети 50. годину живота.

$$_{|n}q_x = 1 - {}_np_x$$

$$_{|5}q_{45} = 1 - 0{,}9339 = 0{,}0661$$

Вероватноћа да лице старо 45 година неће доживети 50. годину живота износи 6,61%.

Пример 2.

Колика је вероватноћа да ће лице старо 50 година доживети 75 година старости, а колика да неће доживети?

Решење:

Пошто са x означавамо старост лица, закључујемо да је x=50, а пошто је x+n=75 следи да је n=25. На основу познатих величина рачунамо вероватноћу доживљења.

$$_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$_{25}p_{50} = \frac{l_{50+25}}{l_{50}} = \frac{l_{75}}{l_{50}} = \frac{24.100}{69.517} = 0{,}3467$$

Закључујемо да је вероватноћа да лице старо 50 година доживи 75 година 34,67%

$$_{|n}q_x = 1 - {}_np_x$$

$$_{|25}q_{50} = 1 - 0{,}3467 = 0{,}6533$$

Вероватноћа да лице старо 50 година неће доживети 75. годину живота износи 65,33%.

Вероватно трајање живота

Код одређивања вероватног трајања живота поћи ћемо од претпоставке да је догађај вероватан ако му је вероватноћа 50%, односно ½, тада се из релације:

$$\frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{2} => \boldsymbol{l_{x+n} = \frac{l_x}{2}}$$

добија $x+n$ као број који можемо прихватити као вероватно трајање живота особе старе x година.

Пример 3.

а) Колико износи вероватно трајање живота особе старе 40 година?

б) Под претпоставком да лице старо 40 година доживи вероватно трајање живота, израчунати ново трајање живота.

Решење:

а) Пошто је x = 40, из горњег обрасца следи:

$$l_{40+n} = \frac{l_{40}}{2} = \frac{78.653}{2} = 39.326{,}5$$

Увидом у таблице смртности, у колони l_x тражимо вредности које су најприближније израчунатој вредности. Закључујемо да је:

$$l_{68}=40.374>l_{40+n}=39.326{,}5>l_{69}=38.128$$

тј. да се вероватно трајање живота налази између 68 и 69 године: $28<n<29$ (68-40=28 и 69-40=29)

По договору, заокружује се на мањи број година тј. узима се да је:

$40+n \approx 68 \Rightarrow n \approx 28$

Вероватно трајање живота лица старог 40 година износи приближно још 28 година.

б) Овде се полази од претпоставке да је лице старо 40 година доживело вероватно трајање живота које смо израчунали, па је сада x=68. Сада следи:

$$l_{68+n} = \frac{l_{68}}{2} = \frac{40.374}{2} = 20.187$$

Понављамо поступак, односно у колони l_x у таблицама смртности тражимо вредности које су најприближније израчунатој вредности. Закључујемо да је:

$$l_{76}=21.797>l_{68+n}=20.187>l_{77}=19.548$$

тј. да се вероватно трајање живота налази између 76 и 77 године: $8<n<9$ (76-68=8 и 77-68=9)

По договору, заокружује се на мањи број година тј. узима се да је:

$68+n \approx 76 \Rightarrow n \approx 8$

Ново вероватно трајање живота лица старог 68 година износи приближно још 8 година, односно 76 година.

Средње трајање живота

Средње трајање живота можемо дефинисати као просечан број година које би још проживела особа стара x година.

Код одређивања средњег трајања живота разликујемо две варијанте.

Прва варијанта

Полази се од тога да све особе које умру у току једне године умру *почетком године.* Укупан број година које преживе l_x лица је:

$$l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots$$

Средње трајање живота лица добићемо када тај укупни број година које проживи l_x лица поделимо бројем l_x лица:

$$\boldsymbol{e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} \cdots}{l_x}}$$

Друга варијанта

Полази се од тога да све особе које умру у току једне године умру *крајем године.* У том случају бисмо добили да је укупан број година које проживи l_x лица:

$$l_x + l_{x+1} + \ldots$$

а средње трајање живота:

$$\boldsymbol{e'_x = \frac{l_x + l_{x+1} + l_{x+2} \cdots}{l_x} = 1 + e_x}$$

Решење проблема приближног одређивања средњег трајања живота могло би да се нађе у аритметичкој средини прве и друге варијанте јер се умирање распоређује током целе године, па ће средње трајање живота које највише одговара стварности бити:

$$\boldsymbol{e_x^0 = \frac{e_x + e_x'}{2} = \frac{e_x + 1 + e_x}{2} = \frac{1}{2} + e_x = \frac{1}{2} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} \dots}{l_x}}$$

Пример 4.

Колико износи средње трајање живота особе старе 35 година?

Решење:

На основу горњег обрасца вршимо следеће израчунавање:

$$e_{35}^0 = \frac{1}{2} + \frac{l_{36} + l_{37} + l_{38} + \cdots}{l_{35}} = 0{,}5 + \frac{2.508.901}{82.581} \approx 30{,}88$$

Суму 2.508.901 добијамо тако што саберемо све вредности из колоне $\boldsymbol{l_x}$ почев од l_{36} па до l_{99}.

Очекивано средње трајање живота лица старог 35 година је још 30,88 година.

Др Наташа Папић-Благојевић, проф.

Литература:

1. Вугделија, Д. (2008). *Актуарска математика*, основни концепт за наставу, Суботица.
2. Закон о осигурању („Службени гласник РС“, бр. 139/2014), https://www.paragraf.rs/propisi/zakon_o_osiguranju-2014.html
3. Кочовић, Ј., Митрашевић, М., и Рајић, В. (2016). *Актуарска математика*. Универзитет у Београду, Економски факултет, Центар за издавачку делатност.
4. Кочовић, Ј. (2006). *Актуарске основе формирања тарифа у осигурању лица*. Универзитет у Београду, ЦИД Економског факултета у Београду.
5. Рашета, Ј. (2008). *Финансијска и актуарска математика*, Универзитет Сингидунум, Београд.
6. Шекарић, М., и Барјактаровић, Л. (2010) *Финансијска математика и актуарство*, скрипта, Универзитет Сингидунум, Београд.
7. http://www.aktuar.rs