EKONOMSKE FUNKCIJE – FUNKCIJE UKUPNIH I PROSEČNIH TROŠKOVA, FUNKCIJA DOBITI

Zadatak.

Data je funkcija ukupnih prihoda $P(p)=15p-\frac{1}{4}p^2$ i funkcija prosečnih troškova $\overline{C}(q)=3q-80+\frac{672}{q}$.

Odrediti:

a) funkciju tražnje $q=q(p)$,
b) funkciju ukupnih prihoda $P=P(q)$,
c) funkciju ukupnih prihoda $C=C(q)$,
d) funkciju dobiti $D=D(q)$,
e) interval rentabilne proizvodnje,
f) optimalni obim proizvodnje i maksimalnu dobit,
g) cenu pri kojoj se postiže maksimalna dobit.

Rešenje:

a) $P(p)=15p-\frac{1}{4}p^2=p\left(15-\frac{1}{4}p\right)$, a kako je $P(p)=p\cdot q$, sledi da je $q=15-\frac{1}{4}p$.

b) Množenjem $q=15-\frac{1}{4}p$ sa 4 dobijamo: $4q=60-p$, odnosno: $p=60-4q$. Dalje sledi:

$P(q)=p\cdot q=(60-4q)q=60q-4q^2$.

c) Iz $\overline{C}(q)=\frac{C(q)}{q}$ sledi $C(q)=q\cdot\overline{C}(q)$, odnosno:

$C(q)=q\left(3q-80+\frac{672}{q}\right)=3q^2-80q+672$.

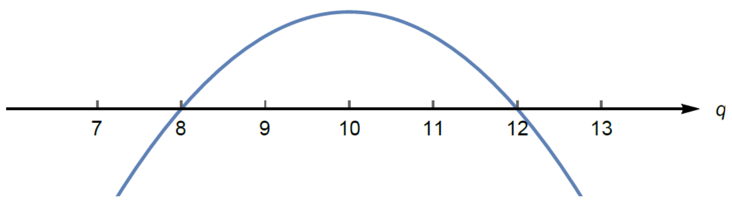
d) $D(q)=P(q)-C(q)=\left(60q-4q^2\right)-\left(3q^2-80q+672\right)=-7q^2+140q-672$.

e) Uslov za interval rentabilne proizvodnje je: $D(q)>0$, odnosno: $-7q^2+140q-672>0$.

Nađimo, najpre, preseke grafika funkcije $D(q)$ sa q - osom:

$$-7q^2+140q-672=0.$$

Odavde je $q_1=8$ i $q_2=12$. Kako je $a=-7<0$, parabola je okrenuta vrhom nagore. Grafik funkcije dobiti $D(q)$ je prikazan na slici ispod.



Odavde sledi $q\in(8,12)$.

f) Optimalni obim proizvodnje postiže se za $q_{opt}=\frac{8+12}{2}=\frac{20}{2}=10$.

Maksimalna dobit je jednaka vrednosti funkcije dobiti u optimalnoj tački:

$D_{\max} = D(q_{opt}) = D(10) = -7 \cdot 10^2 + 140 \cdot 10 - 672 = 28$.

g) Cena pri kojoj se postiže maksimalna dobit je cena kojoj odgovara optimalni obim proizvodnje:
$p_{opt} = 60 - 4q_{opt} = 60 - 4 \cdot 10 = 20$.

Zadatak.

Data je funkcija ukupnih prihoda $P(p) = 50p - \frac{1}{4}p^2$ i funkcija ukupnih troškova $C(q) = q^2 - 40q + 2755$.

Odrediti:

a) funkciju tražnje $q = q(p)$,
b) funkciju ukupnih prihoda $P = P(q)$,
c) funkciju dobiti $D = D(q)$,
d) interval rentabilne proizvodnje,
e) optimalni obim proizvodnje i maksimalnu dobit,
f) cenu pri kojoj se postiže maksimalna dobit.

Rešenje:

a) $P(p) = 50p - \frac{1}{4}p^2 = p\left(50 - \frac{1}{4}p\right)$, a kako je $P(p) = p \cdot q$, sledi da je $q = 50 - \frac{1}{4}p$.

b) Množenjem $q = 50 - \frac{1}{4}p$ sa 4 dobijamo: $4q = 200 - p$, odnosno: $p = 200 - 4q$. Dalje sledi:
$P(q) = p \cdot q = (200 - 4q)q = 200q - 4q^2$.

c) $D(q) = P(q) - C(q) = (200q - 4q^2) - (q^2 - 40q + 2755) = -5q^2 + 240q - 2755$.

d) Uslov za interval rentabilne proizvodnje je: $D(q) > 0$, odnosno: $-5q^2 + 240q - 2755 > 0$.
Odavde sledi $q \in (19, 29)$.

e) Optimalni obim proizvodnje postiže se za $q_{opt} = \frac{19+29}{2} = \frac{48}{2} = 24$.
Maksimalna dobit je jednaka vrednosti funkcije dobiti u optimalnoj tački:
$D_{\max} = D(q_{opt}) = D(24) = -5 \cdot 24^2 + 240 \cdot 24 - 2755 = 125$.

f) Cena pri kojoj se postiže maksimalna dobit je cena kojoj odgovara optimalni obim proizvodnje:
$p_{opt} = 200 - 4q_{opt} = 200 - 4 \cdot 24 = 104$

Napomena. U zadacima ovog tipa je data jedna od funkcija je data jedna od funkcija $q = q(p)$, $P = P(q)$ ili $P = P(p)$.

Da je u prethodnom zadatku bila data funkcija $q = 50 - \frac{1}{4}p$, lako bismo dobili:

$$P(p) = p \cdot q = p \cdot \left(50 - \frac{1}{4}p\right) = 50p - \frac{1}{4}p^2.$$

Iz $q = 50 - \frac{1}{4}p$ sledi $4q = 200 - p$, odnosno $p = 200 - 4q$. Odavde dobijamo:

$$P(q) = p \cdot q = (200 - 4q) \cdot q = 200q - 4q^2.$$

Da je u prethodnom zadatku bila data funkcija $P(q)=200q-4q^2=(200-4q)q$, kako je $P(p)=p\cdot q$, sledi da je $p=200-4q$. Odavde je $4q=200-p$, odnosno $q=50-\frac{1}{4}p$. Dalje dobijamo:

$$P(p)=p\cdot q=p\left(50-\frac{1}{4}p\right)=50p-\frac{1}{4}p^2.$$

Ostatak zadatka c), d), e) i f) se potpuno isto radi kao u prethodnom primeru.