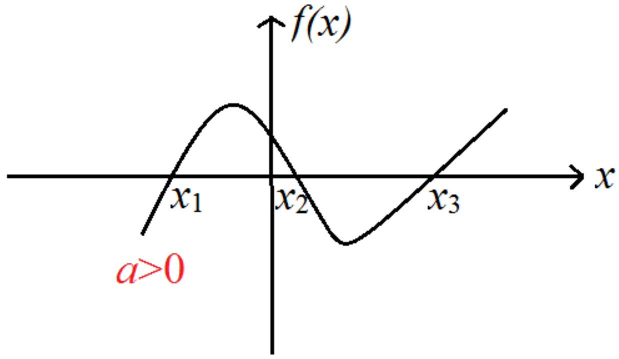
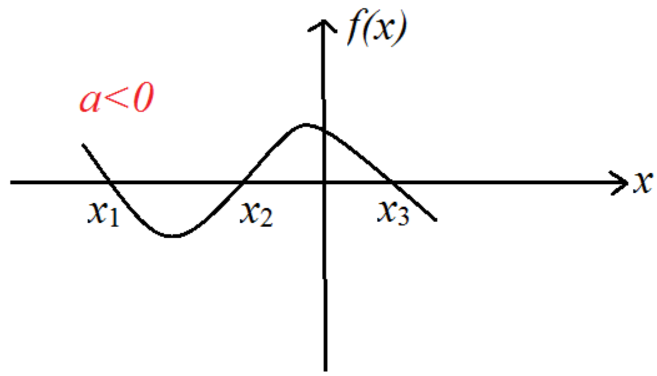
Испитивање функција (наставак)

Поновимо да у зависности од знака коефицијента a, график *кубне* функције $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$, се може појавити у два облика:





Задаци:

2. Дата је функција $f(x) = -x^3+19x^2 - 104x + 140 = (x-2)(-x^2 + 17x - 70)$.

a) одредити нуле функције,
b) скицирати график,
c) одредити екстремне вредности,
d) испитати монотоност,
e) одредити знак,
f) одредити превојну тачку.

Решење:

a) Нуле функције се добијају решавајући једначину $f(x) = 0$, односно, у овом задатку решавајући $(x-2)(-x^2 + 17x - 70) = 0$. Претходна једначина се своди на решавање линеарне једначине $x - 2 = 0$, односно, квадратне једначине $-x^2 + 17x - 70 = 0$. У првом случају лако добијамо $x_1 = 2$, док су решења квадратне једначине дата са

$$x_{2,3} = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-70)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 280}}{-2} = \frac{-17 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-17 \pm 3}{-2},$$

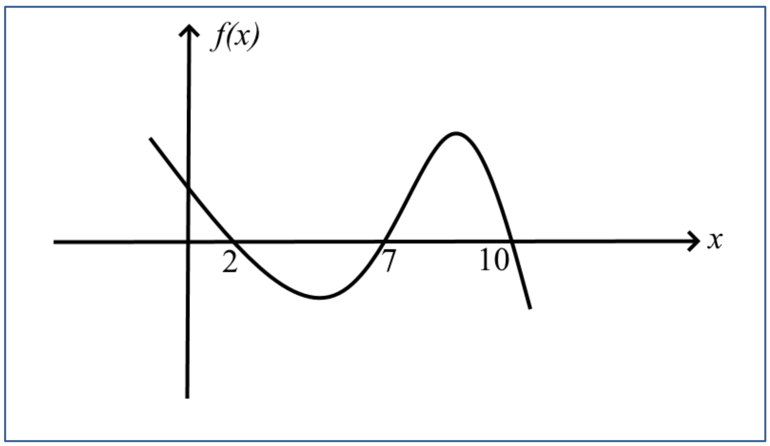
односно,

$$x_2 = \frac{-17+3}{-2} = \frac{-14}{-2} = 7,$$
$$x_3 = \frac{-17-3}{-2} = \frac{-20}{-2} = 10.$$

Користећи особину факторизације кубне функције, полазна функција може се записати у облику

$$f(x) = -1\cdot(x-2)(x-7)(x-10) = -(x-2)(x-7)(x-10).$$

b) График функције пролази кроз нуле $x_1 = 2,\ x_2 = 7,\ x_3 = 10$ и водећи рачуна да је $a = -1 < 0$ добијамо:



Напомена:

Упоредити претходни график са графиком у случају $a = 1 > 0$.

c) За одређивање екстремних вредности (*min*, *max*) неопходно је решити једначину $f'(x) = 0$. Из тог разлога, израчунајмо најпре први извод функције:

$$f'(x) = (-x^3+19x^2-104x+140)' = (-x^3)' + (19x^2)' - (104x)' + (140)'$$
$$= -3x^2 + 38x - 104,$$

што нас доводи до квадратне једначине $-3x^2 + 38x - 104 = 0$. Њеним решавањем добијамо:

$$x_{4,5} = \frac{-38 \pm \sqrt{38^2 - 4\cdot(-3)\cdot(-104)}}{2\cdot(-3)} = \frac{-38 \pm \sqrt{1444-1248}}{-6} = \frac{-38 \pm \sqrt{196}}{-6}$$
$$= \frac{-38 \pm 14}{-6},$$

односно,

$$x_4 = \frac{-38+14}{-6} = \frac{-24}{-6} = 4$$

и

$$x_5 = \frac{-38-14}{-6} = \frac{-52}{-6} = \frac{26}{3}.$$

Будући да $x_4 = 4 \in (2,7)$, на основу графика закључујемо да функција за $x_4 = 4$ достиже (локални) *минимум*, што записујемо:

$$A_{min}\big(4, f(4)\big).$$

Слично, због $x_5 = 26/3 \in (7,10)$, функција достиже (локални) *максимум*:

$$B_{max}\big(26/3, f(26/3)\big).$$

Остаје још да се израчунају вредности $f(4)$, односно, $f(26/3)$. У ту сврху ће нам послужити факторизација полазне кубне функције:

$$f(4) = -(4-2)(4-7)(4-10) = -2\cdot(-3)\cdot(-6) = -36,$$

$$f\left(\frac{26}{3}\right) = -\left(\frac{26}{3}-2\right)\left(\frac{26}{3}-7\right)\left(\frac{26}{3}-10\right)$$

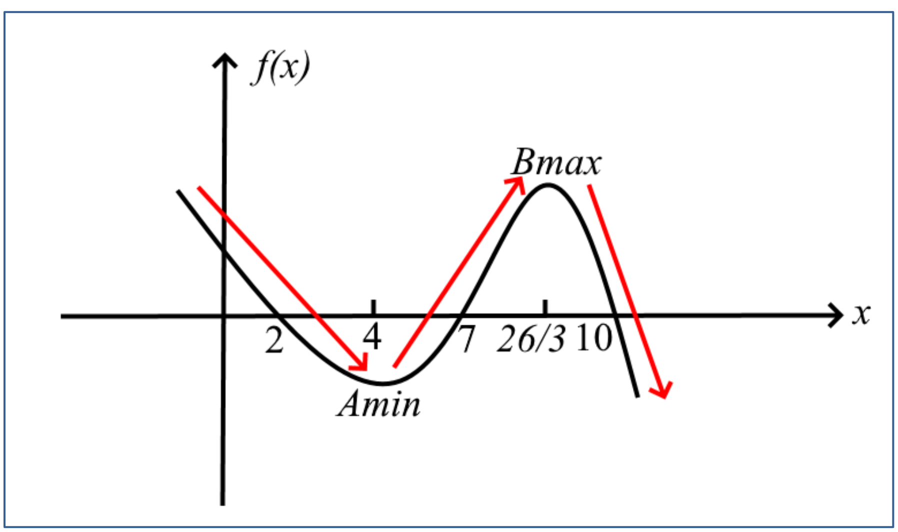
$$= -\left(\frac{26}{3}-\frac{6}{3}\right)\left(\frac{26}{3}-\frac{21}{3}\right)\left(\frac{26}{3}-\frac{30}{3}\right) = -\frac{20}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{400}{27}.$$

Коначно, тражене екстремне вредности су

$$A_{min}(4, -36),$$

$$B_{max}\left(\frac{26}{3}, \frac{400}{27}\right).$$

d) Уцртавајући добијене екстремне вредности A_{min}, односно, B_{max} на претходно добијени график имамо:



одакле записујемо интервале монотоности:

$$f(x)\downarrow \Leftrightarrow x\in(-\infty,4)\cup\left(\frac{26}{3},+\infty\right),$$

$$f(x)\uparrow \Leftrightarrow x\in\left(4,\frac{26}{3}\right).$$

e) Функција је позитивна (негативна) над интервалима на којима се њен график налази испод (изнад) x −осе. Користећи наведени критеријум, са графика добијамо

$$f(x)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(7,10),$$

$$f(x)<0\Leftrightarrow x\in(2,7)\cup(10,+\infty).$$

f) Превојна тачка се добија преко другог извода функције, односно, решавајући једначину $f''(x)=0$.

$$f''(x)=(-3x^2+38x-104)'=(-3x^2)'+(38x)'-(104)'=-6x+38.$$

$$-6x+38=0\Leftrightarrow -6x=-38\Leftrightarrow x=\frac{-38}{-6}=\frac{19}{3}.$$

Према томе, превојна тачка је $C(19/3,f(19/3))$, па као у случају екстремних вредности

$$f\left(\frac{19}{3}\right)=-\left(\frac{19}{3}-2\right)\left(\frac{19}{3}-7\right)\left(\frac{19}{3}-10\right)=-\left(\frac{19}{3}-\frac{6}{3}\right)\left(\frac{19}{3}-\frac{21}{3}\right)\left(\frac{19}{3}-\frac{30}{3}\right)$$
$$=-\frac{13}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{11}{3}\right)=-\frac{286}{27}.$$

Коначно, превојна тачка дата је са $C(19/3,-286/27)$.

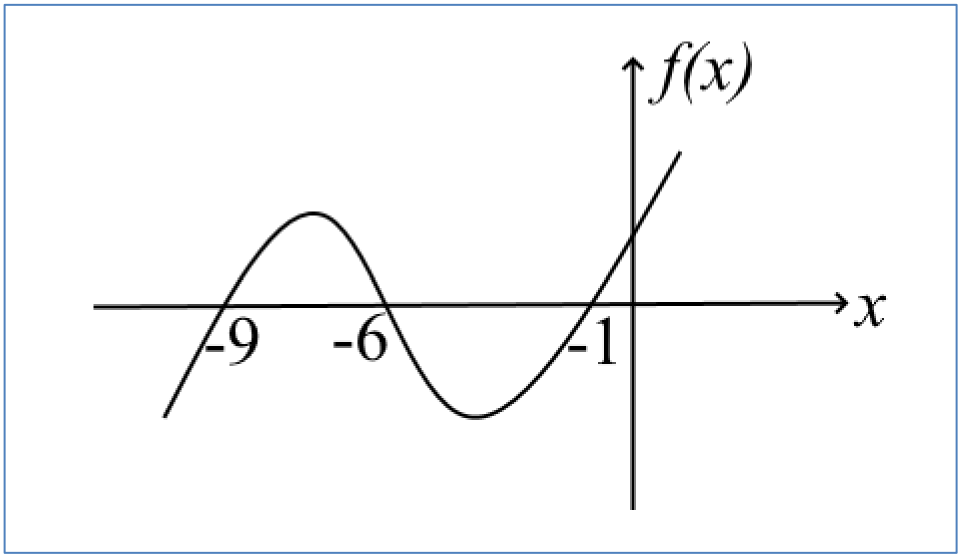
3. Дата је функција $f(x)=x^3+16x^2+69x+54=(x+9)(x^2+7x+6)$.

a) одредити нуле функције,
b) скицирати график,
c) одредити екстремне вредности,
d) испитати монотоност,
e) одредити знак,
f) одредити превојну тачку.

Решење:

a) нуле функције: $x_1 = -9$, $x_2 = -6$, $x_3 = -1$.
факторизација: $f(x) = (x+9)(x+6)(x+1)$.

b) график:



c) екстремне вредности:

$$A_{max}(-23/3, 400/27),$$
$$B_{min}(-3, -36).$$

d) интервали монотоности:

$$f(x) \uparrow \Leftrightarrow x \in (-\infty, -23/3) \cup (-3, +\infty),$$
$$f(x) \downarrow \Leftrightarrow x \in (-23/3, -3).$$

e) знак функције:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-9, -6) \cup (-1, +\infty),$$
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9) \cup (-6, -1).$$

f) превојна тачка:

$$C(-16/3, -286/27).$$

4. Дата је функција $f(x) = -x^3 - 8x^2 - 5x + 14 = (x+2)(-x^2 - 6x + 7)$.

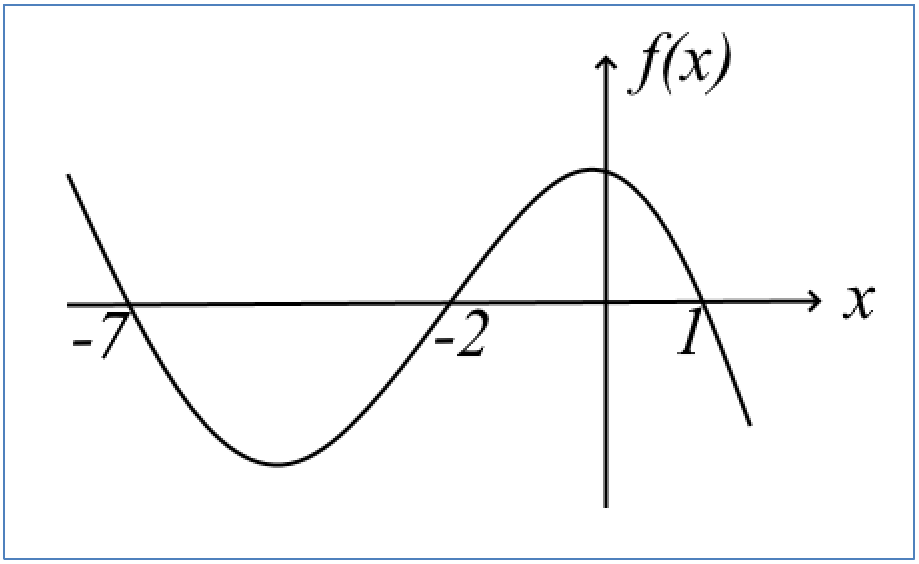
a) одредити нуле функције,
b) скицирати график,
c) одредити екстремне вредности,
d) испитати монотоност,
e) одредити знак,
f) одредити превојну тачку.

Решење:

a) нуле функције: $x_1 = -2$, $x_2 = -7$, $x_3 = 1$.

факторизација: $f(x) = -(x+2)(x+7)(x-1)$.

b) график:



c) екстремне вредности:

$$A_{min}(-5, -36),$$
$$B_{max}(-1/3, 400/27).$$

d) интервали монотоности:

$$f(x) \uparrow \Leftrightarrow x \in (-5, -1/3),$$
$$f(x) \downarrow \Leftrightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (-1/3, +\infty).$$

e) знак функције:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -7) \cup (-2, 1),$$
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-7, -2) \cup (1, +\infty).$$

f) превојна тачка:

$$C(-8/3, -286/27).$$