Неодређени интеграл – примена у економији

За произвољну функцију $f(x)$, *неодређени интеграл* означава се са $\int f(x)dx$. Функција $F(x)$ за коју важи $\int f(x)dx = F(x) + C$, зове се примитивна функција за функцију $f(x)$, док се C зове интеграциона константа. Веза између извода и интеграла дата је са

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \Leftrightarrow \quad (F(x) + C)' = f(x).$$

Уколико изаберемо $f(x) = x^n, n \neq -1$, у том случају важиће

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Пример1:

Применом претходне формуле израчунати интеграле:

1) $\int x^{2020}dx$
2) $\int x^{100}dx$
3) $\int x^2dx$
4) $\int xdx$
5) $\int dx$

Решење:

1) $\int x^{2020}dx = \frac{x^{2020+1}}{2020+1} = \frac{x^{2021}}{2021} = \frac{1}{2021}x^{2021} + C$
2) $\int x^{100}dx = \frac{x^{100+1}}{100+1} = \frac{x^{101}}{101} = \frac{1}{101}x^{101} + C$
3) $\int x^2dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{1}{3}x^3 + C$
4) $\int xdx = \int x^1dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{1}{2}x^2 + C$
5) $\int dx = \int 1dx = \int x^0dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} = x + C.$

У наредном примеру користи се формула:

$$\int const \cdot f(x)dx = const \int f(x)\, dx,$$

при чему $const$ означава константу, односно, број. Неформално речено, у случају када број множи функцију, интеграл тог производа се добија тако што се број помножи са њеним интегралом (број се ‘издвоји’ испред интеграла).

Пример2:

1) $\int 6x^2 dx = 6\int x^2 dx = 6\frac{x^{2+1}}{2+1} = 6\frac{x^3}{3} = 2x^3 + C$
2) $\int -9x^3 dx = -9\int x^3 dx = -9\frac{x^{3+1}}{3+1} = -9\frac{x^4}{4} = -\frac{9}{4}x^4 + C$
3) $\int 4x dx = 4\int x dx = 4\frac{x^2}{2} = 2x^2 + C$
4) $\int 7 dx = 7\int dx = 7x + C.$

Као у случају извода функције, приликом решавања задатака користићемо формуле за *интеграл збира и разлике* функција:

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx,$$

$$\int (f(x) - g(x))\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx.$$

На основу формуле можемо видети да је интеграл збира (разлике) функција једнак збиру (разлици) интеграла истих функција.

Пример3:

1) $\int (10 + 4x)\, dx = \int 10\, dx + \int 4x\, dx = 10\int dx + 4\int x\, dx = 10x + 4\frac{x^2}{2}$
$= 10x + 2x^2 + C.$
2) $\int \left(50 - \frac{3}{2}x\right) dx = \int 50\, dx - \int \frac{3}{2}x\, dx = 50\int dx - \frac{3}{2}\int x\, dx = 50x - \frac{3}{2}\frac{x^2}{2}$
$= 50x - \frac{3}{4}x^2 + C.$

Напомена: Приликом израчунавања интеграла уместо променљиве x могу се појавити и неке друге променљиве, на пример p, односно, q. Све претходне формуле остају на снази, као што се може видети у случају интеграла из претходног примера:

1) $\int (10 + 4p)\, dp = \int 10\, dp + \int 4p\, dp = 10\int dp + 4\int p\, dp = 10p + 4\frac{p^2}{2}$
$= 10p + 2p^2 + C.$
2) $\int \left(50 - \frac{3}{2}q\right) dq = \int 50\, dq - \int \frac{3}{2}q\, dq = 50\int dq - \frac{3}{2}\int q\, dq = 50q - \frac{3}{2}\frac{q^2}{2}$
$= 50q - \frac{3}{4}q^2 + C.$

Поред економских функција које смо већ обрадили: функције понуде, тражње, прихода, трошкова и добити, постоје *функције граничног прихода* $P'(p), P'(q)$, односно, *функција граничних трошкова* $C'(q)$. Опет је p цена производа, док q представља функцију тражње (физички обим производње).

Као што се може приметити, претходне функције дефинисане су преко извода функција прихода $P(p)$ и $P(q)$, односно, функције укупних трошкова $C(q)$. С обзиром на везу између извода и интеграла, те функције су у релацији

$$P(p) = \int P'(p)dp, \qquad P(q) = \int P'(q)dq, \qquad C(q) = \int C'(q)dq.$$

Задаци:

1. Дате су функција граничних прихода $P'(p) = 50 - p$, односно, функција граничних трошкова $C'(q) = 2q - 140$, при чему је $C(10) = 800$. Одредити:
   a) функцију укупног прихода $P = P(p)$,
   b) функцију укупних трошкова $\mathrm{C} = \mathrm{C}(q)$,
   c) функцију тражње $q = q(p)$,
   d) функцију укупног прихода $P = P(q)$,
   e) функцију добити $D = D(q)$,
   f) интервал рентабилне производње,
   g) оптималан обим производње и максималну добит.

   Решење:

   a) Функцију укупног прихода $P = P(p)$ одредићемо користећи формулу $P(p) = \int P'(p)dp$, то јест, решавајући одговарајући интеграл:

   $$P(p) = \int (50 - p)dp = \int 50\,dp - \int p\,dp = 50 \int dp - \int p\,dp$$
   $$= 50p - \frac{1}{2}p^2 + C.$$

   Користећи особину $P(0) = 0$ (нема производње, нема ни прихода), вредност константе C одређује се стављајући $p = 0$ у добијени израз за $P(p)$. На тај начин добијамо

   $$P(0) = 50 \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 + C = C,$$

   одакле следи $C = 0$. Према томе, функција укупног прихода $P(p)$ дата је са

   $$P(p) = 50p - \frac{1}{2}p^2.$$

   b) На сличан начин, функција укупних трошкова $C = C(q)$ одређује се користећи формулу $C(q) = \int C'(q)dq$:

   $$C(q) = \int (2q - 140)dq = \int 2q\,dq - \int 140\,dq = 2\int qdq - 140 \int dq$$
   $$= 2\frac{q^2}{2} - 140q = q^2 - 140q + C.$$

С обзиром на услов задатка: $C(10) = 800$, вредност константе C одређује се стављајући $q = 10$ у добијени израз за $C(q)$. На тај начин добијамо

$$C(10) = 10^2 - 140 \cdot 10 + C = 100 - 1400 + C = -1300 + C.$$

Како је са једне стране $C(10) = 800$, односно, са друге $C(10) = -1300 + C$, даље имамо

$$-1300 + C = 800 \quad \Leftrightarrow \quad C = 800 + 1300 \quad \Leftrightarrow \quad C = 2100.$$

Према томе, функција укупних трошкова $\mathrm{C} = \mathrm{C}(q)$ дата је са

$$\mathrm{C}(q) = q^2 - 140q + 2100.$$

c) Знајући да за функцију прихода $P(p)$ важи формула $P(p) = pq$, као и да се функција добијена у делу задатка под *a*) може факторисати у облику $P(p) = p(50 - \frac{1}{2}p)$, поредећи претходне две формуле закључујемо да мора важити

$$q(p) = 50 - \frac{1}{2}p.$$

d) Да бисмо одредили *функцију прихода* $P(q) = pq$ неопходно је изразити цену p у зависности од тражње q. У ту сврху, множећи функцију тражње $q = 50 - \frac{1}{2}p$ са 2, најпре добијамо $2q = 100 - p$ а затим и $p = 100 - 2q$. Уврштавајући претходни израз у формулу $P(q) = pq$ добија се

$$P(q) = (100 - 2q)q = 100q - 2q^2.$$

e) Функција добити рачуна се по добро познатој формули:

$$D(q) = P(q) - C(q) = 100q - 2q^2 - (q^2 - 140q + 2100) =$$

$$100q - 2q^2 - q^2 + 140q - 2100,$$

па се у том случају добија

$$D(q) = -3q^2 + 240q - 2100.$$

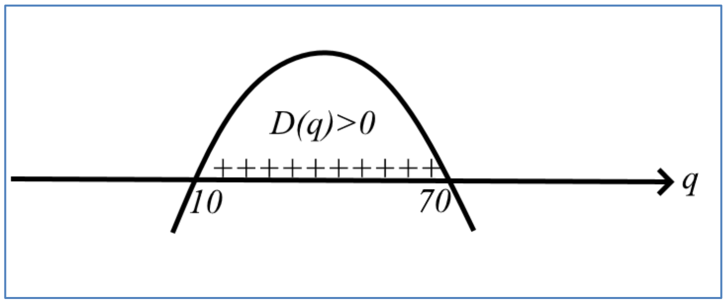
f) Производња је рентабилна (исплатива) у случају позитивне добити, односно, уколико је испуњено $D(q) > 0$. С обзиром да је у нашем случају добит изражена преко квадратне функције, потребно је решити квадратну неједначину

$$-3q^2 + 240q - 2100 > 0.$$

Израчунајмо најпре решења квадратне једначине $-3q^2 + 240q - 2100 = 0$, која представљају пресек графика функције добити и q-осе. Дељењем претходне једначине са 3 добија се еквивалентна једначина $-q^2 + 80q - 700 = 0$, чија су решења

$$q_{1,2} = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-700)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-80 \pm \sqrt{3600}}{-2} = \frac{-80 \pm 60}{-2} = 40 \pm 30,$$

то јест, $q_1 = 10, \quad q_2 = 70$.
Како је коефицијент уз q^2 негативан ($a = -3 < 0$), график функције добити је усмерен на горе, као на слици:



На основу графика, добијамо интервал рентабилне производње:

$$q_{rent} \in (10,70).$$

g) Оптималан обим производње q_{opt}, то јест, производња при којој се постиже максимална добит, добија се преко формуле:

$$q_{opt} = \frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{10 + 70}{2} = 40.$$

На крају, максимална добит D_{max} је добит која одговара оптималном обиму производње:

$$D_{max} = D(q_{opt}) = D(40) = -3\cdot 40^2 + 240\cdot 40 - 2100$$
$$= -4800 + 9600 - 2100,$$

то јест,

$$D_{max} = 2700.$$