Примена неодређеног интеграла у економији (наставак)

Задаци:

2. Дате су функција граничних прихода $P'(p) = 100 - 2p$ и функција граничних трошкова $C'(q) = 2q - 300$, при чему је $C(50) = 2500$. Одредити:

   a) функцију укупног прихода $P = P(p)$,
   b) функцију укупних трошкова $\mathrm{C} = \mathrm{C}(q)$,
   c) функцију тражње $q = q(p)$,
   d) функцију укупног прихода $P = P(q)$,
   e) функцију добити $D = D(q)$,
   f) интервал рентабилне производње,
   g) оптималан обим производње и максималну добит.

   Решење:

   a) Функцију укупног прихода $P = P(p)$ одредићемо користећи формулу $P(p) = \int P'(p)dp$, то јест, решавајући одговарајући интеграл:

$$P(p) = \int (100 - 2p)dp = \int 100\,dp - \int 2p\,dp = 100 \int dp - 2 \int p\,dp$$
$$= 100p - 2\frac{1}{2}p^2 = 100p - p^2 + C.$$

   Користећи особину $P(0) = 0$ (нема производње, нема ни прихода), вредност константе C одређује се стављајући $p = 0$ у добијени израз за $P(p)$. На тај начин добијамо

$$P(0) = 100 \cdot 0 - 0^2 + C = C,$$

   одакле следи $C = 0$. Према томе, функција укупног прихода $P(p)$ дата је са

$$P(p) = 100p - p^2.$$

   b) На сличан начин, функција укупних трошкова $C = C(q)$ одређује се користећи формулу $C(q) = \int C'(q)dq$:

$$C(q) = \int (2q - 300)dq = \int 2q\,dq - \int 300\,dq = 2 \int q dq - 300 \int dq$$
$$= 2\frac{q^2}{2} - 300q = q^2 - 300q + C.$$

С обзиром на услов задатка: $C(50) = 2500$, вредност константе C одређује се уврштавајући $q = 50$ у добијени израз за $C(q)$. На тај начин добијамо

$$C(50) = 50^2 - 300 \cdot 50 + C = 2500 - 15000 + C = -12500 + C.$$

Како је са једне стране дато у задатку $C(50) = 2500$, односно, са друге стране управо израчунато $C(50) = -12500 + C$, даље имамо

$$-12500 + C = 2500 \quad \Leftrightarrow \quad C = 12500 + 2500 \quad \Leftrightarrow \quad C = 15000.$$

Према томе, функција укупних трошкова $\mathrm{C} = \mathrm{C}(q)$ дата је са

$$\mathrm{C}(q) = q^2 - 300q + 15000.$$

c) Знајући да за функцију прихода $P(p)$ важи формула $P(p) = pq$, као и да се функција добијена у делу задатка под *a*) може факторисати у облику $P(p) = p(100 - p)$, поредећи претходне две формуле закључујемо да мора важити

$$q(p) = 100 - p.$$

d) Да бисмо одредили *функцију прихода* $P(q) = pq$ неопходно је изразити цену p у зависности од тражње q. Лако се добија $p = 100 - q$, па уврштавајући тај израз у формулу $P(q) = pq$ добија се

$$P(q) = (100 - q)q = 100q - q^2.$$

e) Функција добити рачуна се по добро познатој формули:

$$D(q) = P(q) - C(q) = 100q - q^2 - (q^2 - 300q + 15000) =$$

$$100q - q^2 - q^2 + 300q - 15000,$$

па се у том случају добија

$$D(q) = -2q^2 + 400q - 15000.$$

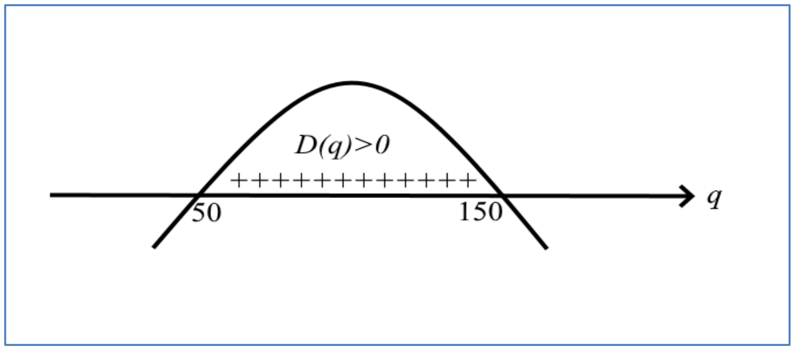
f) Производња је рентабилна (исплатива) у случају позитивне добити, односно, уколико је испуњено $D(q) > 0$. С обзиром да је у нашем случају добит изражена преко квадратне функције, потребно је решити квадратну неједначину

$$-2q^2 + 400q - 15000 > 0.$$

Израчунајмо најпре решења квадратне једначине $-2q^2 + 400q - 15000 = 0$, која представљају пресек графика функције добити и q-осе. Дељењем претходне једначине са 2 добија се еквивалентна једначина $-q^2 + 200q - 7500 = 0$, чија су решења

$$q_{1,2} = \frac{-200 \pm \sqrt{200^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-7500)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-200 \pm \sqrt{10000}}{-2} = \frac{-200 \pm 100}{-2}$$
$$= 100 \pm 50,$$

то јест, $q_1 = 50, \quad q_2 = 150.$
Како је коефицијент уз q^2 негативан ($a = -2 < 0$), график функције добити је усмерен на горе, као на слици:



На основу графика, добијамо интервал рентабилне производње:

$$q_{rent} \in (50, 150).$$

g) Оптималан обим производње q_{opt}, то јест, производња при којој се постиже максимална добит, добија се преко формуле:

$$q_{opt} = \frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{50 + 150}{2} = 100.$$

На крају, максимална добит D_{max} је добит која одговара оптималном обиму производње:

$$D_{max} = D(q_{opt}) = D(100) = -2\cdot 100^2 + 400\cdot 100 - 15000$$
$$= -20000 + 40000 - 15000,$$

то јест,

$$D_{max} = 5000.$$

3. Дате су функција граничних прихода $P'(p) = 90 - \frac{3}{2}p$ и функција граничних трошкова $C'(q) = \frac{4}{3}q - 80$, при чему је $C(30) = 3000$. Одредити:

a) функцију укупног прихода $P = P(p)$,
b) функцију укупних трошкова $C = C(q)$,
c) функцију тражње $q = q(p)$,
d) функцију укупног прихода $P = P(q)$,
e) функцију добити $D = D(q)$,

f) интервал рентабилне производње,

g) оптималан обим производње и максималну добит.

Решење:

a) Функцију укупног прихода $P = P(p)$ одредићемо решавајући одговарајући интеграл:

$$P(p) = \int \left(90 - \frac{3}{2}p\right) dp = \int 90\, dp - \int \frac{3}{2} p\, dp = 90 \int dp - \frac{3}{2} \int p\, dp$$
$$= 90p - \frac{3}{2}\frac{1}{2}p^2 = 90p - \frac{3}{4}p^2 + C.$$

Користећи особину $P(0) = 0$, вредност константе C одређује се стављајући $p = 0$ у добијени израз за $P(p)$. На тај начин добијамо

$$P(0) = 90 \cdot 0 - \frac{3}{4} \cdot 0^2 + C = C,$$

одакле следи $C = 0$. Према томе, функција укупног прихода $P(p)$ дата је са

$$P(p) = 90p - \frac{3}{4}p^2.$$

b) На сличан начин, функција укупних трошкова $C = C(q)$ одређује се користећи формулу $C(q) = \int C'(q) dq$:

$$C(q) = \int \left(\frac{4}{3}q - 80\right) dq = \int \frac{4}{3} q\, dq - \int 80\, dq = \frac{4}{3} \int q dq - 80 \int dq$$
$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{q^2}{2} - 80q = \frac{2}{3}q^2 - 80q + C.$$

С обзиром на услов задатка: $C(30) = 3000$, вредност константе C одређује се увршавајући $q = 30$ у добијени израз за $C(q)$. На тај начин добијамо

$$C(30) = \frac{2}{3} \cdot 30^2 - 80 \cdot 30 + C = \frac{2}{3} \cdot 900 - 2400 + C = 600 - 2400 + C.$$

Како је са једне стране дато у задатку $C(30) = 3000$, односно, са друге стране управо израчунато $C(30) = -1800 + C$, даље имамо

$$-1800 + C = 3000 \quad \Leftrightarrow \quad C = 1800 + 3000 \quad \Leftrightarrow \quad C = 4800.$$

Према томе, функција укупних трошкова $\mathrm{C} = \mathrm{C}(q)$ дата је са

$$\mathrm{C}(q) = \frac{2}{3}q^2 - 80q + 4800.$$

c) Знајући да за функцију прихода $P(p)$ важи формула $P(p) = pq$, као и да се функција добијена у делу задатка под *a*) може факторисати у облику $P(p) = p(90 - \frac{3}{4}p)$, поредећи претходне две формуле закључујемо да мора важити

$$q(p) = 90 - \frac{3}{4}p.$$

d) Да бисмо одредили *функцију прихода* $P(q) = pq$ неопходно је изразити цену p у зависности од тражње q. У ту сврху, множећи функцију тражње $q = 90 - \frac{3}{4}p$ са 4, најпре добијамо $4q = 360 - 3p$ а затим и $3p = 360 - 4q$. Дељењем претходне једнакости са 3 добија се $p = 120 - \frac{4}{3}q$, па уврштавајући тај израз у формулу $P(q) = pq$ добија се

$$P(q) = \left(120 - \frac{4}{3}q\right)q = 120q - \frac{4}{3}q^2.$$

e) Функција добити рачуна се по добро познатој формули:

$$D(q) = P(q) - C(q) = 120q - \frac{4}{3}q^2 - \left(\frac{2}{3}q^2 - 80q + 4800\right) =$$

$$120q - \frac{4}{3}q^2 - \frac{2}{3}q^2 + 80q - 4800,$$

па се у том случају добија

$$D(q) = -2q^2 + 200q - 4800.$$

f) интервал рентабилне производње:

$$q_{rent} \in (40, 60).$$

g) оптималан обим производње:

$$q_{opt} = 50,$$

максимална добит:

$$D_{max} = 200.$$

4. Дате су функција граничних прихода $P'(p) = 2 - p$ и функција граничних трошкова $C'(q) = 2q - 56$, при чему је $C(5) = 18$. Одредити:

a) функцију укупног прихода $P = P(p)$,
b) функцију укупних трошкова $C = C(q)$,
c) функцију тражње $q = q(p)$,
d) функцију укупног прихода $P = P(q)$,
e) функцију добити $D = D(q)$,

f) интервал рентабилне производње,

g) оптималан обим производње и максималну добит.

Решење:

a) функција укупног прихода:

$$P(p) = 2p - \frac{1}{2}p^2.$$

b) функција укупних трошкова:

$$C(q) = q^2 - 56q + 273.$$

c) функција тражње:

$$q(p) = 2 - \frac{1}{2}p.$$

d) функција укупног прихода:

$$P(q) = 4q - 2q^2.$$

e) функција добити:

$$D(q) = -3q^2 + 60q - 273.$$

f) интервал рентабилне производње:

$$q_{rent} \in (7, 13).$$

g) оптималан обим производње:

$$q_{opt} = 10,$$

максимална добит:

$$D_{max} = 27.$$