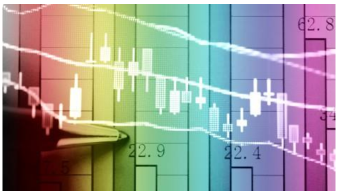

КОМУТАТИВНИ БРОЈЕВИ[1]

Показатељи везани за број живих односно умрлих лица, односно l_x и d_x, чине групу тзв. основних бројева таблица смртности, при чему је:

l_{x+n}- ознака за број живих лица старих $x+n$ година

d_{x+n}- ознака за број умрлих лица у току ($x+n+1$)-ве године, па је $d_{x+n} = l_{x+n} - l_{x+n+1}$

У таблицама смртности са x је означена старост лица, са l_x број живих лица старих x година, са d_x број умрлих лица у току ($x+1$) године старости, тј. број лица која су преживела x-ту годину, али нису доживела ($x+1$) годину старости.

Бројеви l_x, l_{x+1}, l_{x+2},..., d_x, d_{x+1}, d_{x+2},... називају се **основни бројеви**.

Помоћу ових основних бројева и интересне стопе која се примењује у пракси израчунавају се *комутативни бројеви*.

Комутативни бројеви су параметри демографске статистике који се користе у осигурању живота, односно везани су за жива и умрла лица и обрачунске каматне стопе. Комутативни бројеви, у ознаци D_x, N_x, S_x, C_x, M_x, и R_x, могу се поделити у две категорије: комутативне бројеве за жива лица и комутативне бројеве за умрла лица. Вредности комутативних бројева налазе се у Таблицама смртности.

Комутативни бројеви за жива лица и њихово израчунавање

$\boldsymbol{D_x}$ је број дисконтованих живих лица старих x година.

$$D_x = \frac{l_x}{r^x} = l_x \cdot r^{-x} = l_x \cdot II_p^x \qquad r=(1+p)/100$$

где је $\frac{1}{r^x}$ садашња вредност – дисконтована вредност јединице која доспева после x година.

Даље следи да је:

$$D_{x+1} = \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} = l_{x+1} \cdot r^{-x+1} = l_{x+1} \cdot II_p^{x+1}$$

број дисконтованих лица старих x+1 годину, затим

$$D_{x+2} = \frac{l_{x+2}}{r^{x+2}} = l_{x+2} \cdot r^{-x+2} = l_{x+2} \cdot II_p^{x+2}$$

[1] Теоријски део је информативног карактера и важно га је прочитати ради лакшег разумевања појмова који ће надаље бити предмет обраде.

број дисконтованих лица старих x+2 године и тако редом.

Вредности $\boldsymbol{D_x}$ *налазе се у трећој колони Таблица смртности.*

Пошто смо израчунали потребне вредности за D_x, D_{x+1}, D_{x+2}, итд., потребно их је сабрати да би се добио број N_x.

$\boldsymbol{N_x}$ је број који представља збир бројева дисконтованих живих лица почевши од старости x, па до најдубље старости ω коју доживи у таблицама посматрана група лица.

Према томе је:

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{\omega-1} + D_\omega$$

Одатле следи да је:

$$N_{x+1} = D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{\omega+1} + D_\omega$$

Одузимањем ових двеју једнакости добија се:

$$N_x - N_{x+1} = D_x$$

одакле је:

$$N_{x+1} = N_x - D_x$$

Последња једнакост

$$N_x = D_x + N_{x+1}$$

даје нам како се врши израчунавање бројева N_x записаних у таблици смртности.

Вредности $\boldsymbol{N_x}$ *налазе се у четвртој колони Таблица смртности.*

$\boldsymbol{S_x}$ је збир збирова дисконтованих живих лица са почетном старошћу x, па до најдубље старости ω.

Дефинише се са:

$$S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \cdots + N_{\omega-1} + N_\omega$$

а како је:

$$S_{x+1} = N_{x+1} + N_{x+2} + \cdots + N_{\omega+1} + N_\omega$$

следи:

$$S_x - S_{x+1} = N_x$$

Тада је:

$$S_x = N_x + S_{x+1}$$

и

$$S_{x+1} = S_x - N_x$$

Последња једнакост нам даје упутство за израчунавање бројева S_x.

Вредности $\boldsymbol{S_x}$ *налазе се у петој колони Таблица смртности.*

Комутативни бројеви за умрла лица и њихово израчунавање

$\boldsymbol{C_x}$ је број дисконтованих умрлих лица у току (x+1) године старости уз претпоставку да су сва та лица умрла у току године између свог x-тог и (x+1) рођендана и да се све исплате по тим смртним случајевима врше крајем (x-1) године.

Како је са d_x обележен број умрлих лица између x-те и (x+1) године, то је дисконтована вредност тога броја на дан кад су се та лица родила уз дати процентат $p\%$ $(pa)d$:

$$C_x = \frac{d_x}{r^{x+1}} = d_x \cdot r^{-(x+1)} = d_x \cdot II_p^{x+1} \quad r=1+p$$

где је $\frac{1}{r^{x+1}}$ или II_p^{x+1} дисконтована вредност једног динара за (x+1) годину уз $p\%$ (pa) d.

Исто тако се израчунава и C_{x+1}, C_{x+2}, C_{x+3}, итд.

Вредности $\boldsymbol{C_x}$ *налазе се у седмој колони Таблица смртности.*

Пошто се израчунају вредности за C_x, C_{x+1}, C_{x+2},..., њих треба сабрати да би се добио број M_x.

$\boldsymbol{M_x}$ је збир бројева дисконтованих умрлих лица у току x+1, x+2, x+3,... година старости. Односно,

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{\omega-1}$$

где ω означава најдубљу старост коју доживи посматрана група лица у таблицама.

Ова је формула аналогна формули за N_x. Сада закључујемо да важи:

$$M_{x+1} = C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{\omega-1}$$

Даље следи:

$$M_x - M_{x+1} = C_x$$

$$M_x = C_x + M_{x+1}$$

$$M_{x+1} = M_x - C_x$$

Вредности $\boldsymbol{M_x}$ *налазе се у осмој колони Таблица смртности.*

$\boldsymbol{R_x}$ је збир збирова дисконтованих умрлих лица почев од оних који су умрли у току (x+1) године старости. За израчунавање ових бројева важи све што је речено за израчунавање бројева N_x, S_x и M_x.

Према томе,

$$R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \cdots + M_{\omega+1} + M_\omega$$

где ω означава најдубљу старост коју доживи посматрана група лица.

Даље важи:

$$R_{x+1} = M_{x+1} + M_{x+2} + \cdots + M_{\omega+1} + M_{\omega}$$

Следи:

$$R_x - R_{x+1} = M_x$$

$$R_x = M_x + R_{x+1}$$

$$R_{x+1} = R_x - M_x$$

Вредности $\mathbf{R_x}$ *налазе се у деветој колони Таблица смртности*.

Резиме:

- Између величина D_x и C_x, N_x и M_x, постоји веза која нам помаже да, на пример, помоћу D_x израчунамо C_x или помоћу N_x да израчунамо M_x.
- Назначене основне и комутативне бројеве садрже све таблице смртности. Поред ових бројева скоро све таблице садрже и мизу за доживотну личну ренту једног, два, три, па и више лица исте старости.
- Код неких таблица се још јавља и број q_x који представља интензитет смртности, односно вероватноћу смртности.
- На основу свих наведених елемената (*Закона великих бројева, Рачуна вероватноће, Таблица смртности* и *Комутативних бројева*) долази се до формирања тарифа у осигурању.

ОБРАЧУН ТАРИФА У ОСИГУРАЊУ ЖИВОТА

Осигурање живота је писмени уговор (полиса) који је закључен између осигураног лица и осигуравајућег завода према коме се осигурано лице обавезује да под извесним условима плаћа осигуравајућем друштву одређену уговорену суму одмах, у целости или кроз известан број година у више рата на основу које се, по настанку осигураног случаја, осигуранику или кориснику осигурања исплаћује осигурана сума.

Када се уговорена сума уплаћује одједном, онда се каже да је осигурање извршено уплатом *мизе*. Уколико се уговорена сума плаћа више пута било годишње: једанпут, два пута, четири пута итд., тада се каже да се осигурање врши уплатом *премије*.

Премија може бити доживотна или привремена. Доживотну премију осигураник плаћа докле год је жив, док привремену премију плаћа докле је жив уз унапред одређен број година.

Висина уплаћене премије зависи од висине инересне стопе помоћу које се израчунава премија, али и од статистичког материјала на основу кога се врши израчунавање премије. Премије израчунате помоћу статистичког материјала и рачунске интересне стопе зову се *нето премије*.

Осигурање живота се дели на: **осигурање ренте** и **осигурање капитала**. Ако се рента прима годишње, каже се да је годишња, а ако се прима два пута, четири пута, итд., онда је рента у ратама. За разлику од примања ренте, примање капитала се врши једанпут или два пута у животу.

Осигураник, да би обезбедио примање ренте до краја живота или за период по жељи, може да уплати осигуравајућој компанији мизу (једнократну премију) или да ту премију плаћа у ратама.

Ренту која је везана за живот једног лица и коју осигураник прима лично називамо *личном рентом*. Исто тако постоји рента наджививљења или рента у корист трећег лица, којом осигураник, у случају своје смрти, жели да обезбеди чланове своје породице.

Према трајању, рента може бити:

- *временска* (привремена), рента се прима само један одређен временски период;
- *доживотна*, рента се прима доживотно, до краја живота осигураног лица.

Према почетку примања рента може бити:

- *непосредна*, уколико почиње да тече одмах по закључењу осигурања;
- *одложена*, уколико од дана закључивања осигурања до почетка примања ренте протекне неко одређено време (одложеност).

Према начину примања рента може бити:

- *декурзивна*, када се рента прима крајем године, и
- *антиципативна*, када се прима почетком године.

Према висина износа у којима се врши исплата, рента може бити:

- *стална*, и
- *променљива*.

Осигурава се: Уплатом:	**ЛИЧНА РЕНТА** (вишекратни износ)	**КАПИТАЛ** (једнократни износ)
МИЗЕ (једнократни износ)	• Непосредна доживотна рента • Одложена доживотна рента • Непосредна привремена рента • Одложена привремена рента	• Осигурање капитала за случај смрти: • доживотно • одложено • привремено • одложено и привремено • Осигурање капитала за случај доживљења • Мешовито осигурање капитала
ПРЕМИЈЕ (вишекратни износ)	• Премија се плаћа доживотно • рента се прима непосредно и доживотно • рента се прима одложено и доживотно • Премија се плаћа привремено • рента се прима непосредно и доживотно • рента се прима привремено • рента се прима одложено и привремено	• Премија се плаћа доживотно • непосредно осигурање капитала • одложено осигурање капитала • Премија се плаћа привремено • доживотно осигурање капитала за случај смрти • привремено осигурање капитала за случај смрти • привремено осигурање капитала за случај доживљења • мешовито осигурање капитала

Осигурање личне ренте уплатом мизе

Осигурање ренте представља такав вид осигурања у коме осигураник уплатом једнократне премије или плаћањем премије у ратама жели да обезбеди своју будућност или будућност своје породице.

Миза је једнократна премија коју осигураник треба да уплати осигуравајућем друштву, да би у будућности, на основу тако уплаћене мизе, примао ренту (као вишекратни износ) или капитал (као једнократни износ).

Непосредна доживотна рента

Непосредна доживотна рента је таква рента коју осигураник прима од дана осигурања па до краја свог живота. Пошто се та рента може исплаћивати или почетком или крајем године, прво ћемо проучити ренту која се ислаћује почетком године.

а) *Антиципативна рента* (рента почетком године)

Да бисмо боље схватили суштину постављеног задатка, полазимо од општег случаја:

Колико ће износити нето миза коју треба да уплати лице старо x година, да би по основу уплате примило годишњу ренту од R динара почетком сваке године, непосредно од дана осигурања, до краја живота?

Са $\boldsymbol{a_x}$ означићемо нето мизу за 1 динар ове ренте и претпоставићемо да ће l_x лица старих x година осигурати ренту од по 1 динар. Осигуравајућа компанија ће примити од l_x лица старих x година $l_x \cdot a_x$ динара, а исплатити:

почетком 1. године l_x 1 динар

почетком 2. године l_{x+1} 1динар

почетком 3. године l_{x+2} 1 динар

...

Пошто све уплате, према принципу еквиваленције, морају бити једнаке свим исплатама, сведеним на рок „данас“, тада ће вредност горњих исплата бити:

прве исплате l_x

друге исплате $\frac{l_{x+1}}{r}$

треће исплате $\frac{l_{x+2}}{r^2}$

...

Следи да је нето миза за 1 динар ове ренте:

$$\boldsymbol{a_x = \frac{N_x}{D_x}}$$

Док је нето миза за R динара непосредне личне ренте:

$$\boldsymbol{M = R \cdot a_x}$$

Пример 1.

Лице старо 40 година осигурало је ренту од 20.000 дин. коју ће да прима од дана осигурања докле год је живо. Колику ће нето мизу лице уплатити за ово осигурање, ако је рента антиципативна?

Решење:

Старост лица је x=40 година, а износ ренте R=20.000 дин. Пошто рента почиње да се прима „од дана осигурања“, закључујемо да је непосредна, а пошто је лице прима „докле год је живо“ закључујемо да је доживотна. Пошто је рента антиципативна, примењујемо следећу формулу:

$$a_x = \frac{N_x}{D_x}$$

Из таблица смртности очитавамо вредности за комутативне бројеве N_{40} и D_{40}, па следи:

$a_{40} = \frac{N_{40}}{D_{40}} = \frac{263.643,62}{16.382,56}$=16,09

Закључујемо да је нето миза за 1 динар ове ренте 16,09 дин.

Затим рачунамо нето мизу за 20.000 динара ренте:

$$M = R \cdot a_x$$

$M = 20.000 \cdot 16,09$

M = 321.800

Закључујемо да је миза за 20.000 динара ренте 321.800 дин. Ово значи да би осигураник требао једнократно да уплати износ од 321.800 динара, како би од дана осигурања, па до краја живота почетком сваке године примао 20.000 динара.

б) *Декурзивна рента* (рента крајем године)

Полазимо од општег случаја:

Колико ће износити нето миза коју треба да уплати лице старо x година, да би по основу уплате примило годишњу ренту од R динара крајем сваке године, непосредно од дана осигурања, до краја живота?

Са $\boldsymbol{a'_x}$ означићемо нето мизу за 1 динар ове ренте. Укупна примања од l_x лица старих x година су $l_x \cdot a'_x$ динара.

Нето миза за 1 динар ове ренте биће:

$$\boldsymbol{a'_x} = \frac{N_x - D_x}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} - 1 = a_x - 1 = \boldsymbol{\frac{N_{x+1}}{D_x}}$$

Док је миза за R динара ове ренте:

$$\boldsymbol{M = R \cdot a'_x}$$

Пример 2.

Лице старо 40 година осигурало је ренту од 20.000 дин коју ће да прима од дана осигурања докле год је живо. Колику ће нето мизу лице уплатити за ово осигурање, ако је рента декурзивна?

Решење:

Старост лица је x=40 година, а износ ренте R=20.000 дин. Пошто рента почиње да се прима „од дана осигурања“, закључујемо да је непосредна, а пошто је лице прима „докле год је живо“ закључујемо да је доживотна. Пошто је рента декурзивна, односно прима се крајем године, примењујемо следећу формулу:

$$a'_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Из таблица смртности очитавамо вредности за комутативне бројеве N_{40+1} и D_{40}, па следи:

$$a'_{40} = \frac{N_{40+1}}{D_{40}} = \frac{N_{41}}{D_{40}}$$

$$a'_{40} = \frac{247.261{,}06}{16.382{,}56}$$

$$a'_{40} = 15{,}09$$

Закључујемо да је нето миза за 1 динар ове ренте 15,09 дин.

Затим рачунамо нето мизу за 20.000 динара ренте:

$$M = R \cdot a'_x$$

$M = 20.000 \cdot 15{,}09 = 301.800$ динара.

Закључујемо да је миза за 20.000 динара ренте 301.800 дин. Ово значи да би осигураник требао једнократно да уплати износ од 301.800 динара, како би од дана осигурања, па до краја живота крајем сваке године примао 20.000 динара.

Овде примећујемо разлику у односу на претходни пример од 20.000 динара. То је разлика за годину дана „кашњења“, пошто се овај износ прима крајем године.

Одложена доживотна рента

Карактеристика ове ренте је у томе да осигураник при склапању уговора о осигурању уплаћује једнократну премију (мизу), а тек после извесног броја година почиње да прима ренту. Уколико се догоди да осигураник умре пре него што почне да прима ренту, уплаћена премија (миза) у целости остаје осигуравајућој компанији. Уколико осигураник умре у току примања одложене ренте, тада се преостали део мизе користи за исплату живим осигураницима.

Одложена доживотна рента се може примати и почетком (антиципативна рента) и крајем године (декурзивна рента).

а) *Антиципативна рента* (рента почетком године)

Полазимо од општег случаја:

Лице старо x година осигурава ренту од R динара коју треба да прима доживотно, након истека k година од дана осигурања. Израчунати нето мизу за ову ренту.

Ако обележимо нето мизу за 1 динар ове антиципативне ренте са ${}_{k|}a_x$ тада ће осигуравајуће друштво примити од l_x лица старих x година:

$$l_x \cdot {}_{k|}a_x \text{ динара.}$$

Како укупне уплате морају бити једнаке укупним исплатама сведено на исти рок, тада је нето миза за 1 динар осигуране одложене животне ренте:

$${}_{k|}a_x = \frac{N_{x+k}}{D_x}$$

а нето миза R динара је:

$$M = R \cdot {}_{k|}a_x$$

Пример 3.

Лице старо 38 година, осигурало је ренту од 30.000 динара да је прима доживотно антиципативно по истеку 9 година од дана осигурања. Колико износи нето миза за ово осигурање?

Решење:

Старост лица је x=38 година, а износ ренте R=30.000 дин. Пошто рента почиње да се прима „по истеку 9 година од дана осигурања“, закључујемо да је одложена, односно k=9, и доживотна. Пошто је рента антиципативна, односно прима се почетком године, примењујемо следећу формулу:

$$_{k|}a_x = \frac{N_{x+k}}{D_x}$$

$$_{9|}a_{38} = \frac{N_{38+9}}{D_{38}} = \frac{N_{47}}{D_{38}} = \frac{164.480{,}14}{18.079{,}83} = 9{,}09$$

Закључујемо да је нето миза за 1 динар ове ренте 9,09 дин.

Затим рачунамо нето мизу за 30.000 динара ренте:

$$M = R \cdot _{k|}a_x$$

$M = 30.000 \cdot 9{,}09 = 272.700$ динара.

Закључујемо да је миза за 30.000 динара ренте 272.700 дин. Ово значи да би осигураник требао једнократно да уплати износ од 272.700 динара, како би по истеку 9 година од дана осигурања, па до краја живота почетком сваке године примао 30.000 динара ренте.

б) *Декурзивна рента* (рента крајем године)

За декурзивну ренту (ренту на крају k+1- ве године) мизу за 1 динар обележићемо са $_{k|}a_x^{'}$, па је нето миза за 1 динар осигуране декурзивне ренте:

$$_{k|}a_x^{'} = \frac{N_{x+k+1}}{D_x}$$

а миза за ренту од R динара је:

$$M = R \cdot _{k|}a_x^{'}$$

Пример 4.

Лице старо 50 година, осигурало је ренту од 30.000 динара да је прима доживотно, декурзивно, по истеку 5 година од дана осигурања. Колико износи нето миза за ово осигурање?

Решење:

Старост лица је x=50 година, а износ ренте R=30.000 дин. Пошто рента почиње да се прима „по истеку 5 година од дана осигурања“, закључујемо да је одложена, односно k=5, и доживотна. Пошто је рента декурзивна, односно прима се крајем године, примењујемо следећу формулу:

$$_{k|}a_x^{'} = \frac{N_{x+k+1}}{D_x}$$

Из таблица смртности очитавамо вредности за комутативне бројеве N_{50+5+1} и D_{50}, па следи:

$$_{5|}a_{50}^{'} = \frac{N_{50+5+1}}{D_{50}} = \frac{N_{56}}{D_{50}} = \frac{80.583,643}{9.781,919} = 8,24$$

Закључујемо да је нето миза за 1 динар ове ренте 8,24 дин.

Затим рачунамо нето мизу за 30.000 динара ренте:

$$M = R \cdot {_{k|}a_x^{'}}$$

$M = 30.000 \cdot 8,24 = 242.700$ динара.

Закључујемо да је миза за 30.000 динара ренте 242.700 дин. Ово значи да би осигураник требао једнократно да уплати износ од 242.700 дин динара, како би од дана осигурања, па до краја живота крајем сваке године примао 30.000 динара.

Др Наташа Папић-Благојевић, проф.

Литература:

1. Вугделија, Д. (2008) *Актуарска математика*, основни концепт за наставу, Суботица.
2. Кочовић, Ј., Митрашевић, М., и Рајић, В. (2016). *Актуарска математика*. Универзитет у Београду, Економски факултет, Центар за издавачку делатност.
3. Кочовић, Ј. (2006) *Актуарске основе формирања тарифа у осигурању лица*, ЦИД Економског факултета у Београду.
4. Ралевић, Р. (1973) *Финансијска и актуарска математика*, Савремена администрација, Београд.
5. Шекарић М. и Барјактаровић, Л. (2010) *Финансијска математика и актуарство*, скрипта, Универзитет Сингидунум, Београд.