
### *Непосредна привремена рента*

Рента која се према уговору плаћа, односно прима највише $n$ пута, под условом да је осигураник жив за све време примања, зове се *привремена лична рента*. Као и претходно поменуте ренте и ова се може примати почетком, али и крајем године. Такође, може бити непосредна, али и одложена.

а) *Антиципативна рента* (рента почетком године)

Полазимо од општег случаја:

Лице старо $x$ година осигурало је ренту од $R$ динара, да је прима највише $n$[1] година. Уколико се миза за један динар осигуране антиципативне ренте обележи са ${}_{|n}a_x$ тада ће осигуравајуће друштво примити од $l_x$ осигураних лица старих $x$ година $l_x \cdot {}_{|n}a_x$ динара.

Осигуравајуће друштво ће исплатити:

почетком прве године $l_x$ динара,

почетком друге године $l_{x+1}$ динара,

почетком треће године $l_{x+2}$ динара, ...

почетком $n$-те године $l_{x+n-1}$ динара.

Како укупне уплате морају бити једнаке укупним исплатама сведено на исти рок, тада је нето миза за 1 динар осигуране непосредне привремене ренте:

$${}_{|n}a_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Из једначине се види да је непосредна привремена антиципативна рента заправо разлика непосредне доживотне и одложене доживотне личне ренте.

Миза за R динара овакве ренте једнака је:

$$M = R \cdot {}_{|n}a_x$$

[1] $n$ је ознака за привременост ренте

### Пример 1.

Лице старо 40 година, осигурало је ренту од 25.000 динара да је прима од дана осигурања антиципативно, али највише 20 година. Колико износи нето миза за ово осигурање?

*Решење*:

Старост лица је $x$=40 година, $n$=20, а износ ренте $R$=25.000 дин. Пошто рента почиње да се прима „од дана осигурања“, закључујемо да је непосредна, а пошто је лице прима „највише 20 година“ закључујемо да је привремена. Пошто је рента антиципативна, примењујемо следећу формулу:

$$|na_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Из таблица смртности очитавамо вредности за комутативне бројеве $N_{40}, N_{60}$, и $D_{40}$, па следи:

$|20a_{40} = \frac{N_{40} - N_{60}}{D_{40}} = \frac{263.643,62 - 55.414,907}{16.382,56}$=12,71

Закључујемо да је нето миза за 1 динар ове ренте 12,71 дин.

Затим рачунамо нето мизу за 25.000 динара ренте:

$$M = R \cdot {}_{|n} a_x$$

$M = 25.000 \cdot 12,71 = 317.750$

Закључујемо да је миза за 25.000 динара ренте 317.750 дин. Ово значи да осигураник треба једнократно да уплати износ од 317.750 динара, како би од дана осигурања, а највише током 20 година примао 25.000 динара.

б) *Декурзивна рента* (рента крајем године)

Полазимо од општег случаја:

Код декурзивне ренте мизу за 1 динар обележићемо са ${}_{|n} a_x'$ . Осигуравајуће друштво ће примити од $l_x$ осигураних лица старих $x$ година $l_x \cdot {}_{|n} a_x'$ динара.

Исплате ће редом бити:
крајем 1. године $l_{x+1}$ динара,

крајем 2. године $l_{x+2}$ динара,

...

крајем $n$-те године $l_{x+n}$ динара.

Поштујући принцип еквиваленције, нето миза за 1 динар осигуране декурзивне ренте износи:

$$_{|n}a_x' = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

а миза за ренту од $R$ динара је:

$$M = R \cdot {}_{|n}a_x'$$

### Пример 2.

Лице старо 42 године, осигурало је ренту од 15.000 динара да је прима од дана осигурања декурзивно, а највише 15 година. Колико износи нето миза за ово осигурање?

*Решење*:

Старост лица је $x$=42 године, $n$=15, а износ ренте $R$=15.000 дин. Пошто рента почиње да се прима „од дана осигурања“, закључујемо да је непосредна, а пошто је лице прима „највише 15 година“ закључујемо да је привремена. Пошто је рента декурзивна, односно прима се крајем године, примењујемо следећу формулу:

$$_{|n}a_x' = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

Из таблица смртности очитавамо вредности за комутативне бројеве $N_{42+1}$ , $N_{42+15+1}$ и $D_{42}$, па следи:

$$_{|15}a_{42}' = \frac{N_{42+1} - N_{42+15+1}}{D_{42}}$$

$$_{|15}a_{42}' = \frac{216.841{,}25 - 67.192{,}181}{14.830{,}58}$$

$$_{|15}a_{42}' = 10{,}09$$

Закључујемо да је нето миза за 1 динар ове ренте 10,09 дин.

Затим рачунамо нето мизу за 15.000 динара ренте:

$$M = R \cdot {}_{|15}a_{42}$$

$M = 15.000 \cdot 10{,}09 = 151.350$ динара.

Закључујемо да је миза за 15.000 динара ренте 151.350 дин. Ово значи да осигураник треба једнократно да уплати износ од 151.350 динара, како би од дана осигурања,а највише 15 година крајем сваке године примао 15.000 динара.

### *Одложена привремена рента*

Уколико се лице старо $x$ година осигура тако да ренту коју лично прима $n$ година почиње да прима тек после $k$ година од почетка осигурања, онда се говори о *одложеној привременој ренти*. Као и све друге ренте, и ова рента се може примати и почетком и крајем године.

а) *Антиципативна рента* (рента почетком године)

Лице старо $x$ година осигурало је ренту од $R$ динара да је прима одмах по истеку $k^2$ година у току $n$ година.

Уколико се нето миза за један динар ове ренте обележи са ${}_{k|n}a_x$, тада ће осигуравајуће друштво од $l_x$ осигураних лица старих $x$ година примити $l_x \cdot {}_{k|n}a_x$ динара.

Пошто исплате почињу тек почетком ($x$+$k$+1) године осигуравајуће друштво ће исплатити:

почетком ($k$+1) године $l_{x+k}$ динара,
почетком ($k$+2) године $l_{x+k+1}$ динара,
почетком ($k$+3) године $l_{x+k+2}$ динара, ...
почетком ($k$+$n$) године $l_{x+k+n-1}$ динара.

Поштујући правило еквиваленције, добија се да је нето миза за 1 динар овакве ренте:

$$ {}_{k|n}a_x = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x} $$

[2] $k$ је ознака за одложеност ренте

Из једначине се види да нето миза за 1 динар одложене привремене ренте представља разлику између нето миза за 1 динар одложене доживотне антиципативне ренте после $k$ година и одложене доживотне антиципативне ренте која се прима после $(k+n)$ година.

Миза за R динара овакве ренте једнака је:

$$M = R \cdot {}_{k|n}a_x$$

## Пример 3.

Лице старо 30 година, осигурало је ренту од 5.000 динара да је прима по истеку 7 година, али највише следећих 20 година. Колико износи нето миза за ово осигурање, ако је рента антиципативна ?

*Решење*:

Старост лица је $x$=30 година, $k$ =7, $n$=20, а износ ренте $R$=5.000 дин. Пошто рента почиње да се прима „по истеку 7 година“, закључујемо да је одложена, а пошто је лице прима „највише 20 година“ закључујемо да је привремена. Пошто је рента антиципативна, примењујемо следећу формулу:

$$ {}_{k|n}a_x = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x}$$

Из таблица смртности очитавамо вредности за комутативне бројеве $N_{37}$, $N_{57}$, и $D_{30}$, па следи:

$$ {}_{7|20}a_{30} = \frac{N_{30+7} - N_{30+7+20}}{D_{30}}$$

$$ {}_{7|20}a_{30} = \frac{317.922{,}64 - 73.678{,}342}{26.605{,}43} = 9{,}18$$

Закључујемо да је нето миза за 1 динар ове ренте 9,18 дин.

Затим рачунамо нето мизу за 5.000 динара ренте:

$$M = R \cdot {}_{k|n}a_x$$

$M = 5.000 \cdot 9{,}18 = 45.900$

Закључујемо да је миза за 5.000 динара ренте 45.900 дин. Ово значи да осигураник треба једнократно да уплати износ од 45.900 динара, како би по истеку 7 година, али највише током следећих 20 година примао 5.000 динара.

б) *Декурзивна рента* (рента крајем године)

За декурзивну ренту мизу за 1 динар обележићемо са ${}_{k|n}a_x^{'}$, па се добија:

$${}_{k|n}a_x^{'} = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x}$$

а миза за ренту од $R$ динара је:

$$M = R \cdot {}_{k|n}a_x^{'}$$

### Пример 4.

Лице старо 33 године, осигурало је ренту од 12.000 динара да је прима по истеку 10 година, а највише 25 година. Колико износи нето миза за ово осигурање, ако је рента декурзивна?

*Решење*:

Старост лица је $x$=33 година, $k$ =10, $n$=25, а износ ренте $R$=12.000 дин. Пошто рента почиње да се прима „по истеку 10 година“, закључујемо да је одложена, а пошто је лице прима „највише 25 година“ закључујемо да је привремена. Пошто је рента декурзивна, примењујемо следећу формулу:

$${}_{k|n}a_x^{'} = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x}$$

Из таблица смртности очитавамо вредности за комутативне бројеве $N_{44}$, $N_{69}$, и $D_{33}$ , па следи:

$${}_{10|25}a_{33} = \frac{N_{33+10+1} - N_{33+10+25+1}}{D_{33}}$$

$$_{10|25}a_{33} = \frac{202.736{,}43 - 19.386{,}536}{23.048{,}31} = 7{,}96$$

Закључујемо да је нето миза за 1 динар ове ренте 7,96 дин.

Затим рачунамо нето мизу за 12.000 динара ренте:

$$M = R \cdot {}_{k|n}\, a_x^{'}$$

$M = 12.000 \cdot 7{,}96 = 95.520$

Закључујемо да је миза за 12.000 динара ренте 95.520 дин. Ово значи да осигураник треба једнократно да уплати износ од 95.520 динара, како би по истеку 10 година, али највише током 25 година примао 12.000 динара.

*Др Наташа Папић-Благојевић, проф.*

**Литература**:


1. Вугделија, Д. (2008) *Актуарска математика*, основни концепт за наставу, Суботица.
2. Кочовић, Ј., Митрашевић, М., и Рајић, В. (2016). *Актуарска математика*. Универзитет у Београду, Економски факултет, Центар за издавачку делатност.
3. Кочовић, Ј. (2006) *Актуарске основе формирања тарифа у осигурању лица*, ЦИД Економског факултета у Београду.
4. Ралевић, Р. (1973) *Финансијска и актуарска математика*, Савремена администрација, Београд.
5. Шекарић М. и Барјактаровић, Л. (2010) *Финансијска математика и актуарство*, скрипта, Универзитет Сингидунум, Београд.