ПРИПРЕМА ЗА ТЕСТ II

Пример 1.

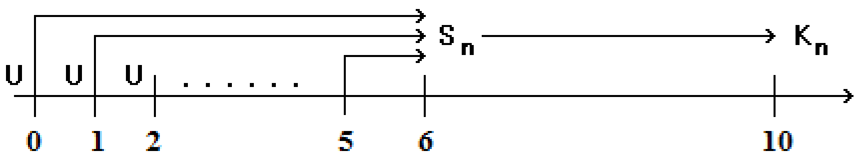
Почетком сваког полугодишта, у наредних 6 година, улаже се у банку по 3.000 дин. уз каматну стопу 8%$(pa)d$ и полугодишње капиталисање. Одредити суму улога: а) После 6 година; б) После 10 година.

Решење:

а) У питању су антиципативни улози, али је капиталисање полугодишње, па за дато n=6·2=12, p=8%:2=4% и U=3.000 дин. следи:

$$S_n = U \cdot III^{n}_{p\%} = 3.000 \cdot III^{12}_{4\%} = 3.000 \cdot 15{,}6268 = 46.880{,}5 \text{ дин.}$$

б) За период од 6 до 10 године није било улагања па је сума улога S_n на крају 6 године почетни капитал за наредно време од 4 године (без нових улагања) и треба га увећати фактором акумулације (помножити фактором првих таблица).



За $S_n = K$ следи (води се и даље рачуна о томе да је капиталисање полугодишње):

$$K_n = K \cdot I^{8}_{4\%} = (U \cdot III^{12}_{4\%}) \cdot I^{8}_{4\%} = (3.000 \cdot 15{,}6268) \cdot 1{,}3686 = 64.160{,}65$$

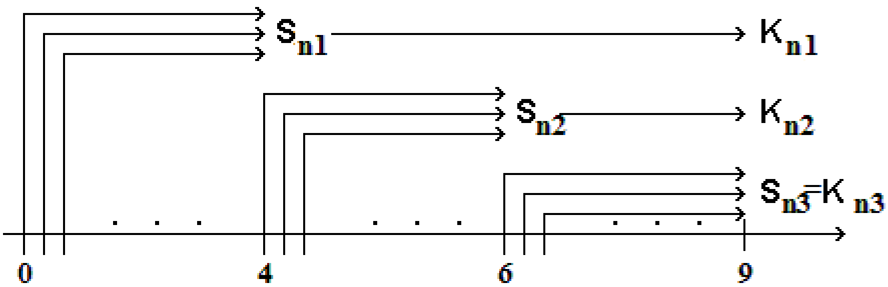
Увећани капитал после 10 година је 64.160,65 дин.

Пример 2.

У банку се улаже почетком сваке године и то: прве 4 године по 2.000 динара, следеће 2 године по 4.000 динара и наредне 3 године по 5.000 дин. Каматна стопа је $6\%(pa)d$, а капиталисање годишње.
Одредити: а) Суму улога на крају 9 године; б) Садашњу (актуелну) вредност суме улога.

Решење:

а) Прво ћемо израчунати вредност сваке појединачне суме ове три групе улога на крају 9 године:



Вредност прве групе улога, за дато $n_1=4$, $У=2.000$ и $p=6\%$, на крају четврте године је:

$$S_{n1} = U \cdot III_{p\%}^{n1} = 2.000 \cdot III_{6\%}^{4} = 2.000 \cdot 4,6371 = 9.274,2$$

А вредност те групе улога, за $S_{n1} = K_1$, на крају 9 године је:

$$K_{n1} = K_1 \cdot I_{6\%}^{5} = 9.274,2 \cdot 1,3382 = 12.410,73$$

Вредност друге групе улога (од 4 до 6 године), за дато $n_2=2$, $U=4.000$ и $p=6\%$, на крају 6 године је:

$$S_{n2} = 4.000 \cdot III_{6\%}^{2} = 4.000 \cdot 2,1836 = 8.734,4$$

А вредност те групе улога, за $S_{n2} = K_2$, на крају 9 године је:

$$K_{n2} = K_2 \cdot I_{6\%}^{3} = 8.734,4 \cdot 1,1910 = 10.402,67$$

Вредност треће групе улога (од 6 до 9 године) је:

$$S_{n3} = 5.000 \cdot III_{6\%}^{3} = 5.000 \cdot 3,3746 = 16.873$$

а како за S_{n3} нема времена укамаћивања првим таблицама јер је то сума улога на крају 9 године, онда је $S_{n3} = K_{n3}$. Вредност укупне суме улога на крају 9 године је сада збир вредности свих појединачних сума група улога доведених на рок краја 9 године, односно:

$$K_n = K_{n1} + K_{n2} + K_{n3} = 12.410,73 + 10.402,67 + 16.873 = 39.686,4$$

б) Садашња вредност K суме улога K_n добија се када се укупна сума улога K_n на крају 9 године дисконтује за време од 9 година, односно израчунава се тако што се вредност укупне суме улога помножи есконтним фактором (другим таблицама).

$$K = K_n \cdot II_{6\%}^{9} = 39.686{,}4 \cdot 0{,}5919 = 23.490{,}38$$

Пример 3.

Улагано је током 15 година крајем сваке године по 10.000 дин. у банку која плаћа $2\%(pa)d$ камате и капиталише годишње. Израчунати суму тих улога:

a) на крају петнаесте године;
b) годину дана после последњег улога.

Решење:

а) Пошто се улаже крајем сваке године у питању су декурзивни улози, па уз дате услове U=10.000 дин., p=2%(па)д и n=15, следи:

$$S_n^{'} = U \cdot (1 + III_{p\%}^{n-1}) = 10.000 \cdot (1 + III_{2\%}^{14}) = 10.000 \cdot (1 + 16{,}2934) = 172.934 \text{ дин.}$$

б) $S_n^{'}$ је сума улога на крају петнаесте године, тако да је потребно увећати тај капитал фактором акумулације за период од годину дана, односно, $S_n^{'} = K$

$$K_n = K \cdot I_{p\%}^{n} = 172.934 \cdot I_{2\%}^{1} = 172.934 \cdot 1{,}0200 = 176.392{,}68 \text{ дин.}$$

Пример 4.

Током 10 година, уз $6\%(pa)d$ и годишње капиталисање, улагано је по 10.000 динара почетком сваке године. Који ће се износ примати на основу тих улагања почев од данас почетком сваке године током наредних 8 година?

Решење:

Пошто се улагања врше почетком сваке године, за дате услове n=10, p=6% и U=10.000, потребно је одредити суму антиципативних улога после десет година према обрасцу:

$$S_n = U \cdot III_{p\%}^{n}$$

Са друге стране, за услове n=8 и p=6%, потребно је одредити који ће се износ примати на основу тих улагања, за шта ће нам послужити образац за утврђивање садашње вредности низа једнаких антиципативних улога:

$$S_0{'} = U \cdot (1 + IV_{p\%}^{n-1})$$

Изједначавањем $S_n = S_0^{'}$, односно $U \cdot III_{p\%}^{n} = U \cdot (1 + IV_{p\%}^{n-1})$ следи:

$$10.000 \cdot III_{6\%}^{10} = U \cdot (1 + IV_{6\%}^{8-1})$$

$$10.000 \cdot 13{,}9716 = U \cdot (1+5{,}5824)$$
$$13.971{,}6 = U \cdot 6{,}5824 \Rightarrow U = 21.225{,}69 \text{ дин.}$$

Пример 5.

Крајем сваке године током 6 година у банку се улаже по 3.000 динара, уз 8%$(pa)d$ и годишње капиталисање. Који ће се износ примати на основу тих улагања почев од данас крајем сваке године током наредних 7 година уз 4%$(pa)d$ и годишње капиталисање?

Решење:

Пошто се улагања врше крајем сваке године, за дате услове n=6, p=8% и U=3.000, потребно је одредити суму декурзивних улога после шест година према обрасцу:

$$S_n' = U \cdot (1 + III_{p\%}^{n-1})$$

Са друге стране, за услове n=7 и p=4%, потребно је одредити који ће се износ примати на крајем сваке године основу тих улагања, за шта ће нам послужити образац за утврђивање садашње вредности низа једнаких декурзивних улога:

$$S_0 = U \cdot IV_{p\%}^{n}$$

Изједначавањем $S_n' = S_0$, односно $U \cdot (1 + III_{p\%}^{n-1}) = U \cdot IV_{p\%}^{n}$ следи:

$$3.000 \cdot \left(1 + III_{8\%}^{6-1}\right) = U \cdot IV_{4\%}^{7}$$
$$3.000 \cdot \left(1 + 6{,}3359\right) = U \cdot 6{,}0021$$
$$22.007{,}7 = U \cdot 6{,}0021 \Rightarrow U = \frac{22.007{,}7}{6{,}0021} = 3.666{,}67 \text{ дин.}$$

Пример 6.

Зајам се амортизује 3 године једнаким годишњим ануитетима од 10.000 динара уз 3%$(pa)d$ камате и годишње капиталисање. Направити амортизациони план и извршити проверу.

Решење: $a = 10.000$; $p = 3\%$; $n = 3$

$$Z = a\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)} = 10.000 \cdot \frac{1{,}03^3 - 1}{1{,}03^3(1{,}03-1)} = 10.000 \cdot 2{,}828611 = 28.286{,}11$$

n	Износ дуга	i	$b=a-i$
1	28.286,11	848,58	9.151,42
2	19.134,69	574,04	9.425,96
3	9.708,73	291,26	9.708,74
Σ	57.129,53	1.713,88	28.286,12

$$i_1 = \frac{Z \cdot p}{100} = \frac{28.286{,}11 \cdot 3}{100} = 848{,}58 \;;$$

$$b_1 = a - i_1 = 10.000 - 848{,}58 = 9.151{,}42 \;;$$

$$R_{n-1} = R_2 = Z - b_1 = 28.286{,}11 - 9.151{,}42 = 19.134{,}69$$

$$i_2 = \frac{R_2 \cdot p}{100} = \frac{19.134{,}69 \cdot 3}{100} = 574{,}04$$

$$b_2 = a - i_2 = 10.000 - 574{,}04 = 9.425{,}96 \;;$$

$$R_{n-2} = R_1 = R_2 - b_2 = 19.134{,}69 - 9.425{,}96 = 9.708{,}73$$

$$i_3 = \frac{R_1 \cdot p}{100} = \frac{9.708{,}73 \cdot 3}{100} = 291{,}26$$

$$b_3 = a - i_3 = 10.000 - 291{,}26 = 9.708{,}74$$

Провера обухвата три елемента, којима се потврђује тачност израђеног амортизационог плана:

1) $R_1 = b_{\mathrm{n}}; \qquad 9.708{,}73 \cong 9.708{,}74$

2) $\sum_{i=1}^{3} b_i = \mathrm{Z}; \qquad 28.286{,}12 \cong 28.286{,}11$

3) $\sum_{i=1}^{3} i_i = \frac{(Z + R_2 + R_1) \cdot p}{100};$

$$1.713{,}88 = \frac{57.129{,}63 \cdot 3}{100};$$

$$1.713{,}88 \cong 1.713{,}89.$$

На основу извршене провере, може се закључити да је амортизациони план тачно израђен.

Пример 7.

Зајам од 100.000 динара амортизује се једнаким годишњим ануитетима са 6%$(pa)d$ камате и годишње капиталисање у току 20 година. После дванаестог плаћеног ануитета време отплаћивања зајма се продужава за 10 година, а каматна стопа се смањује за 2%. Одредити нови ануитет.

Решење:

У првом кораку израчунава се остатак дуга на дан промене услова отплаћивања зајма, према првобитним условима, па на основу израчунатог остатка дуга рачунамо нови анитет према новим условима.

За дато $Z = 100.000;\quad n = 20;\quad p = 6\%;\quad m = 1;$

потребно је израчунати $R_{n-c} = a \cdot IV_{p\%}^{n-c}$, а за то је потребно одредити ануитет, па је:

$$a = Z \cdot V_{p\%}^{n} = 100.000 \cdot V_{6\%}^{20} = 100.000 \cdot 0{,}0872 = 8.720$$

Пошто је до промене услова отплаћивања зајма дошло после дванаестог плаћеног ануитета, односно c=12, даље следи:

$$R_{n-c} = a \cdot IV_{6\%}^{20-12} = 8.720 \cdot 6{,}2098 = 54.149{,}46$$

На крају, за $p_1 = 6\%$ и $k = 10$, следи да је нови ануитет:

$$a_1 = R_{n-c} \cdot V_{p_1\%}^{n-c+k} = 54.149{,}46 \cdot V_{4\%}^{20-12+10} = 54.149{,}46 \cdot 0{,}0790 = 4.277{,}81$$

Пример 8.

Зајам од 300.000 динара амортизује се 18 година једнаким годишњим ануитетима уз каматну стопу 6%$(pa)d$ и годишње капиталисање. Четири месеца по исплати осмог ануитета странке су се договориле да се интересна стопа смањи за 1%, а дужник се обавезао да ће остатак дуга отплатити у наредних 12 година једнаким годишњим ануитетима. Израчунати нови ануитет.

Решење:

Да бисмо израчунали нови ануитет a_1 прво морамо да израчунамо остатак дуга на дан промене услова. Значи, прво одредимо остатак дуга после 8 плаћених ануитета, а пре тога одредимо ануитет којим се зајам почео амортизовати:

$$Z = 300.000;\quad n = 18;\quad p = 6\%;\quad c = 8;$$

$$a = Z \cdot V_{p\%}^{n} = 300.000 \cdot V_{6\%}^{18} = 300.000 \cdot 0{,}0924 = 27.720$$

Сада је остатак дуга на дан осмог плаћеног ануитета:

$$R_{n-c} = a \cdot IV_{6\%}^{18-8} = 27.720 \cdot 7{,}3601 = 204.021{,}972$$

На овај остатак дуга је потребно додати камату за четири месеца и на тај начин добијамо увећани остатак дуга R'_{n-c}, односно:

$$R'_{n-c} = R_{n-c} + i;\qquad \text{где је } i = \frac{R_{n-c} \cdot p \cdot m}{1200} = \frac{204.021{,}972 \cdot 6 \cdot 4}{1200} = 4.080{,}44$$

Отуда:

$$R'_{n-c} = R_{n-c} + i = 204.021{,}972 + 4.080{,}44 = 208.102{,}41$$

па је, за дато p_1=5% и n_1=12, нови ануитет:

$$a_1 = R'_{n-c} \cdot V_{p_1\%}^{n_1} = 208.102{,}41 \cdot V_{5\%}^{12} = 208.102{,}41 \cdot 0{,}1128 = 23.473{,}95$$