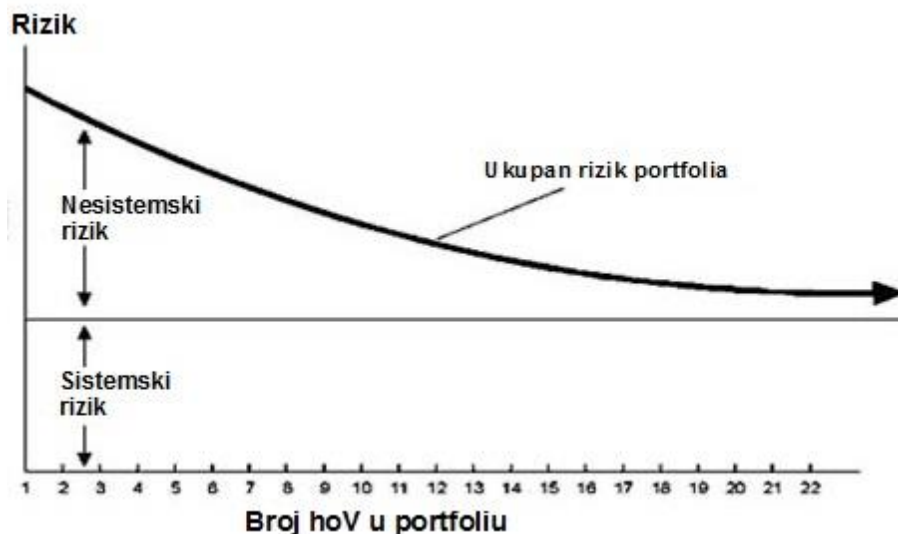


6. PORTFOLIO

6.1. PRINOS I VARIJANSA PORTFOLIA I ŠARPOV RACIO

Portfolio je skup dve ili više HoV, u koje se istovremeno ulaže sa ciljem smanjenja rizika ulaganja i povećanja prinosa, koji mogu da se uporede sa rizikom i prinosom ulaganja u samo jednu HoV. Kao što je ranije rečeno, diverzifikacija smanjuje nesistemski ili specifičan rizik ulaganja, dok na sistemski rizik (β) reaguje svaka kompanija u manjoj ili većoj meri, i sistemski rizik portfolija je ponderisani prosek beti svih akcija u portfoliju. S obzirom na to, i izloženost sistemskom riziku može biti umanjena, ali ne može biti anulirana, jer sve kompanije reaguju na sistemski rizik. O nesistemskom i sistemskom riziku je govoreno u poglavlju 3 kada smo računali β kao meru sistemskog rizika, a slika 6.1 prikazuje nesistemski i sistemski rizik i njihovu promenu s obzirom na broj HoV u portfoliju. U ovom poglavlju će se objašnjavati principi sastavljanja portfolia na bazi dva instrumenta.

Slika 6.1. Grafički prikaz sistemskog i nesistemskog rizika



Izvor: delo autora.

Kada se razmišlja o alokaciji sredstava unutar portfolija, onda se dva osnovna pitanja postavljaju – u koje HoV uložiti sredstva i koliko uložiti u svaku HoV, odnosno koliki će udeo ulaganja biti u svaku HoV. U odgovoru na ovo pitanje, jako bitnu ulogu ima nivo korelacije između dva instrumenta. Da se potsetimo, korelacija je veličina koja govori o uzajamnom kretanju prinosa dva instrumenta, i što je korelacija niža, odnosno bliža nuli, diverzifikacija je uspešnija. Još bolja situacija je ako je korelacija negativna između dva instrumenta, međutim takvi instrumenti su retki u praksi. Zašto je bitno da je korelacija između dva instrumenta niska? Niska korelacija je bitna zato što je onda to indikator da će se prinosi između dva instrumenta poništavati, čime će se smanjiti rizik portfolia.

Neke osnovne i važne činjenice vezane za portfolio su:

- 1) Stopa prinosa portfolia je jednaka ponderisanom proseku pojedinačnih prinosa na hartije od vrednosti koje ulaze u portfolio, a ponderi su udeli pojedinačnih HoV u portfoliu. To se računa prema izrazu (6.1):

$$r_p = W_A r_A + W_B r_B \quad (6.1)$$

Gde je r_p prinos portfolia, a r_A i r_B su prinosi pojedinačnih HoV (A i B). W_A i W_B su udeli pojedinačnih HoV u portfoliu (eng. *weight*).

- 2) Varijansa portfolia dva instrumenta je zbir kvadriranih ponderisanih standardnih devijacija dva instrumenta u portfoliu, koji je uvećan za $2 \times$ proizvod ponderisanih standardnih devijacija i koeficijenta korelacije ta dva instrumenta. Ponderi su udeli dva instrumenta u portfoliu. **Jako je bitno zapamtiti da varijasa portfolija nikako nije ponderisani prosek varijansi dva instrumenta.** Prema tome, varijansa portfolia se računa prema izrazu (6.2):

$$\sigma_p^2 = (W_A \sigma_A)^2 + (W_B \sigma_B)^2 + 2(W_A \sigma_A)(W_B \sigma_B) \rho_{AB} \quad (6.2)$$

Gde je σ_p^2 varijansa portfolia, σ_A i σ_B su standardne devijacije HoV (A i B), a ρ_{AB} je koeficijent korelacije između HoV u portfoliu (A i B).

Izraz $2(W_A \sigma_A)(W_B \sigma_B) \rho_{AB}$ može da se napiše i kao $2W_A W_B COV(r_A, r_B)$ jer je $\rho_{AB} = \frac{COV(r_A, r_B)}{\sigma_A \times \sigma_B}$, odnosno $COV(r_A, r_B) = \rho_{AB} \times \sigma_A \times \sigma_B$

- 3) Dokle god je koeficijent korelacije manji od jedan, mogućnosti za diverzifikaciju postoje, odnosno tada je varijansa portfolio manja nego ponderisani prosek pojedinačnih varijansi HoV koje ulaze u portfolio. Kada je koeficijent korelacije $\rho_{AB} = 1$, onda mogućnosti korelacije više ne postoje i tada je varijansa portfolia ista kao i ponderisani prosek varijansi dva instrumenta koja ulaze u portfolio.

ZADATAK 16 – računanje varijanse portfolia sa različitim nivoom korelacije

Dokažite tvrdnju da je varijansa portfolia manja od varijanse ponderisanog proseka HoV koje čine portfolio ako je koeficijent korelacije manji od 1. Standardne devijacije instrumenata A i B su: $\sigma_A = 15\%$, $\sigma_B = 19\%$, a koeficijenti korelacije između ta dva instrumenta su sledeća: a) 60%, b) 15%, c) 0%, d) 100%, e) -30%. Udeo instrumenta A u portfoliu iznosi 45%, a instrumenta B 55%. U kom scenariju će varijansa portfolia biti najmanja?

Rešenje:

Osenčene i boldovane vrednosti u jednačinama za računanje varijanse portfolia su koeficijenti korelacije, da bi se lakše uočili, jer se oni menjaju u izrazu za varijansu portfolia (σ_p^2). Pošto postoji 5 različitih koeficijenata korelacije, za svaki će se izračunati varijansa portfolia prema izrazu (6.2).

- a) $\sigma_p^2 = (0.45 \times 0.15)^2 + (0.55 \times 0.19)^2 + 2(0.45 \times 0.15)(0.55 \times 0.19) \times$
0.6 =
 $= 0.00456 + 0.01092 + 2 \times 0.00675 + 0.1045 \times 0.6 = 0.023941$
 $\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0.023941} = 0.1547$
- b) $\sigma_p^2 = (0.45 \times 0.15)^2 + (0.55 \times 0.19)^2 + 2(0.45 \times 0.15)(0.55 \times 0.19) \times$
0.15 =
 $= 0.00456 + 0.01092 + 2 \times 0.00675 + 0.1045 \times 0.15 = 0.017593$
 $\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0.017593} = 0.1326$
- c) $\sigma_p^2 = (0.45 \times 0.15)^2 + (0.55 \times 0.19)^2 + 2(0.45 \times 0.15)(0.55 \times 0.19) \times$
0 =
 $= 0.00456 + 0.01092 + 2 \times 0.00675 + 0.1045 \times 0 = 0.015477$
 $\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0.015477} = 0.1244$
- d) $\sigma_p^2 = (0.45 \times 0.15)^2 + (0.55 \times 0.19)^2 + 2(0.45 \times 0.15)(0.55 \times 0.19) \times$
1 =
 $= 0.00456 + 0.01092 + 2 \times 0.00675 + 0.1045 \times 1 = 0.029584$
 $\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0.029584} = 0.172$
- e) $\sigma_p^2 = (0.45 \times 0.15)^2 + (0.55 \times 0.19)^2 + 2(0.45 \times 0.15)(0.55 \times 0.19) \times$
(-0.3) =
 $= 0.00456 + 0.01092 + 2 \times 0.00675 + 0.1045 \times (-0.3) = 0.011244$
 $\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0.011244} = 0.106$

Odgovor: Na bazi rezultata može se videti da je najmanja varijansa portfolia ($\sigma_p = 0.106$) kad je korelacija između dva instrumenta -0.3, što ukazuje da se u ovom slučaju prinosi između dva instrumenta u najvećem stepenu poništavaju, čime se smanjuje rizik, ili standardna devijacija portfolia. Takođe, moguće je primetiti da što je korelacija manja od 1, time je standardna devijacija portfolia manja, odnosno rizik portfolia je manji, što onda ukazuje da je diverzifikacija portfolia bolja.

Druga tvrdnja koju treba dokazati je ta da je ponderisani prosek dve varijanse (ili standardne devijacije) veći od varijanse (standardne devijacije) portfolia kada je korelacija manja od 1, a kada je korelacija 1, onda je ponderisani prosek dve varijanse jednak varijansi portfolia. Sve jedno je da li se uzimaju u obzir varijanse ili standardne

devijacije, princip ostaje isti. Prema tome, ponderisani prosek standardnih devijacija pojedinačnih instrumenata iznosi:

$$W_A\sigma_A + W_B\sigma_B = 0.45 \times 0.15 + 0.55 \times 0.19 = 0.172$$

U skladu sa tim, možemo uporediti ponderisanu standardnu devijaciju dva instrumenta sa standardnom devijacijom portfolia koje su izračunate:

- a) $W_A\sigma_A + W_B\sigma_B = 0.172 > \sigma_p = 0.1547$
- b) $W_A\sigma_A + W_B\sigma_B = 0.172 > \sigma_p = 0.1326$
- c) $W_A\sigma_A + W_B\sigma_B = 0.172 > \sigma_p = 0.1244$
- d) $W_A\sigma_A + W_B\sigma_B = 0.172 = \sigma_p = 0.172$
- e) $W_A\sigma_A + W_B\sigma_B = 0.172 > \sigma_p = 0.106$

Tvrđnja je dokazana, odnosno u 4 od 5 slučajeva, standardna devijacija portfolia je manja od ponderisanog proseka dve standardne devijacije, sem u slučaju kad je korelacija 1, a to je slučaj (d). Tada je standardna devijacija portfolia ista kao i ponderisani prosek dve standardne devijacije, što nam govori da tada diverzifikacija nije moguća.

ZADATAK 17 – ucrtavanje portfolia u grafikon koji imaju različite nivoe korelacije

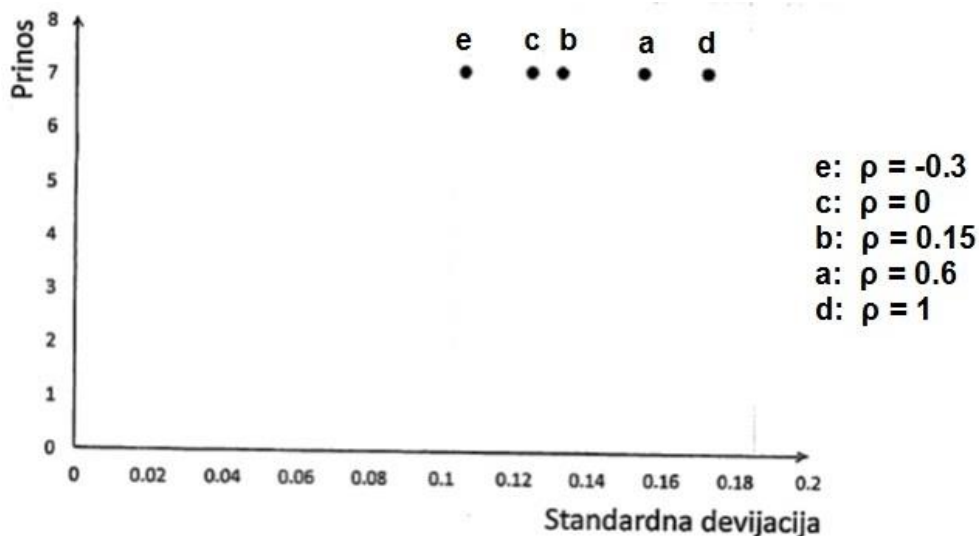
Na bazi podataka iz prethodnog zadatka (zadatka 15) ucrtajte tačke različitih portfolia na grafikon, ako je stopa prinosa instrumenta A = 6%, a stopa prinosa instrumenta B = 8%. Udeli instrumenata A i B u portfoliju su isti kao i u zadatku 15, odnosno udeo instrumenta A u portfoliju iznosi 45%, a instrumenta B 55%. Prokomentarišite grafikon.

Rešenje:

Da bismo mogli da ucrtamo različite portfolie u grafikon, prvo moramo da izračunamo stopu prinosa portfolia, jer svaki portfolio ima dve vrednosti: prinos na Y osi i rizik, odnosno standardnu devijaciju na X osi. Stopa prinosa portfolia (r_p) je ista za sve varijante različitih korelacija, pošto je stopa prinosa jednaka ponderisanom proseku pojedinačnih prinosa na hartije od vrednosti koje ulaze u portfolio, odnosno koeficijent korelacije ne igra ulogu pri izračunavanju stope prinosa portfolija. Prinos portfolia se računa kao u jednačini (6.1):

$$r_p = W_A r_A + W_B r_B = 0.45 \times 6 + 0.55 \times 8 = 7.1$$

Ucrtani portfolii izgledaju:



Komentar: Urtavanjem tačaka portfolia sa različitim korelacijama između instrumenata A i B, možemo zaključiti da što je korelacija manja između dva instrumenta to je tačka na grafikonu pomerenja više ulevo, ka nuli. Drugim rečima, na ovaj način se vizuelno vidi da je rizik portfolia manji sa smanjenjem korelacija između dva instrumenta koji ulaze u taj portfolio. Pri tome, sve tačke se nalaze na istoj horizontalnoj liniji, jer se prinosi ne razlikuju bez obzira koliki je koeficijent korelacije.

Šarпов ratio:

Kada investitori donose odluku u kakav portfolio da plasiraju svoja sredstva, onda rizik, u obliku standardne devijacije portfolia, igra važnu ulogu, ali takođe investitor vodi računa i o prinosu portfolia, jer se preko prinosa portfolia u suštini izražava zarada investitora. Generalno, viši rizik podrazumeva veći prinos, i obrnuto. Međutim, ove dve veličine nisu savršeno korelirane, te je moguće da od dve akcija koje imaju isti prinos jedna ima veći rizik od druge. Finansijski pokazatelj koji uzima u obzir obe veličine se naziva Šarпов ratio i računa se kao u jednačini (6.3):

$$\text{Sharpe ratio} = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p} \quad (6.3)$$

Gde je r_p prinos portfolia, r_f je bezrizična kamatna stopa, i σ_p je standardna devijacija portfolia. Što je Šarпов ratio veći, to je veća nagrada za investitora za preuzeti rizik, i takav portfolio je bolji od portfolia koji ima niži Šarпов ratio. Ako je koeficijent korelacije 1, onda se Šarпов ratio ne menja bez obzira koliki su udeli dva instrumenta u portfoliu.

ZADATAK 18: – izračunavanje varijanse portfolija i Šarпов ratio, kada je korelacija jednaka jedinici, a udeli u portfoliima su različiti

Izračunajte pod I) varijansu portfolija, i pod II) odnos između prinosa i rizika (tzv. Šarпов ratio) ako su udeli instrumenta A u portfoliu: a) 25%, b) 47%, c) 63% i d) 94%,

a prinosi instrumenata A i B su dati u sledećoj tabeli. Protumačite rezultate. Takođe, izračunajte koeficijent korelacije između dve akcije i protumačite ga.

| | Verovatnoća P_i | Prinos kompanije A (R_{Ai}) | Prinos kompanije B (R_{Bi}) |
|---------------|-------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| Ekspanzija | 0,3 | 4 | 7 |
| Normalan rast | 0,4 | 4.6 | 8.05 |
| Recesija | 0,3 | 3.38 | 6.44 |

Rešenje:

Da bismo izračunali varijansu portfolio preko jednačine (6.2), potrebno je da znamo varijanse pojedinačnih instrumenata i koeficijent korelacije između ta dva instrumenta. Nijedna od te tri veličine nije data, što znači da moramo da ih izračunamo. Da bismo došli do koeficijenta korelacije, potrebna nam je kovarijansa.

Kovarijansa se računa preko formule:

$$COV(R_A, R_B) = \sum_{i=1}^n [(R_A - E(R_A)) \times (R_B - E(R_B)) \times P_i]$$

Za lakši račun možemo koristiti tabelu u kojoj se računaju elementi potrebni za izračunavanje kovarijanse i koeficijenta korelacije:

| Verovatnoća P_i | Prinos R_A | Prinos R_B | Odstupanje od očekivanog prinosa $R_A - E(R_A)$ | Odstupanje od očekivanog prinosa $R_B - E(R_B)$ | Kvadrat odstupanja od očekivanog prinosa $(R_A - E(R_A))^2$ | Kvadrat odstupanja od očekivanog prinosa $(R_B - E(R_B))^2$ | $COV(R_A, R_B)$ |
|-------------------|--------------|--------------|---|---|---|---|-----------------|
| 0.3 | 4 | 6 | -0.1 | -0.15 | 0.01 | 0.0225 | 0.0045 |
| 0.4 | 5 | 7.5 | 0.9 | 1.35 | 0.81 | 1.8225 | 0.486 |
| 0.3 | 3 | 4.5 | -1.1 | -1.65 | 1.21 | 2.7225 | 0.5445 |
| Σ | | | | | 0.69 | 1.5525 | 1.035 |

Očekivani prinos akcije A i B:

$$E(R_A) = P_{Ai} \times R_{Ai} = 0.3 \times 4 + 0.4 \times 5 + 0.3 \times 3 = 4.1$$

$$E(R_B) = P_{Bi} \times R_{Bi} = 0.3 \times 6 + 0.4 \times 7.5 + 0.3 \times 4.5 = 6.15$$

$$COV(R_A, R_B) = [0.3 \times (-0.1) \times (-0.15)] + [0.4 \times 0.9 \times 1.35] + [0.3 \times (-1.1) \times (-1.65)] = 1.035$$

Standardne devijacije oba instrumenta su:

$$\sigma_A = \sqrt{\sigma_A^2} = \sqrt{0.69} = 0.830662$$

$$\sigma_B = \sqrt{\sigma_B^2} = \sqrt{1.5525} = 1.245994$$

Pošto imamo sve elemente, možemo izračunati koeficijent korelacije:

$$\rho_{AB} = \frac{COV_{AB}}{\sigma_A \times \sigma_B} = \frac{1.035}{0.830662 \times 1.5525} = \frac{1.035}{1.035} = 1$$

Varijanse i standardne devijacije portfolija se računaju prema izrazu: $\sigma_p^2 = (W_A\sigma_A)^2 + (W_B\sigma_B)^2 + 2(W_A\sigma_A)(W_B\sigma_B)\rho_{AB}$.

D) Uz pretpostavku različitih udela, varijanse i standardne devijacije portfolija su:

a) $\sigma_p^2 = (0.25 \times 0.830662)^2 + (0.75 \times 1.245994)^2 + 2(0.25 \times 0.830662)(0.75 \times 1.245994) \times 1 = 1.30453125$

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{1.30453125} = 1.142160781$$

Standardna devijacija portfolija računata na bazi ponderisanog proseka:

$$\sigma_p^2 = W_A\sigma_A + W_B\sigma_B = 0.25 \times 0.830662 + 0.75 \times 1.24599 = 1.142160781$$

Vidimo da je razlika između standardne devijacije portfolija i standardne devijacije ponderisanog proseka jednaka 0. Odnosno, mogućnosti diverzifikacije ne postoje kada je koeficijent korelacije jednak 1, što je već dokazano u zadatku 16.

b) $\sigma_p^2 = (0.47 \times 0.830662)^2 + (0.53 \times 1.245994)^2 + 2(0.47 \times 0.830662)(0.53 \times 1.245994) \times 1 = 1.10415525$

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{1.10415525} = 1.050787919$$

Standardna devijacija portfolija računata na bazi ponderisanog proseka:

$$\sigma_p = 0.47 \times 0.830662 + 0.53 \times 1.24599 = 1.050787919$$

Vidimo da je razlika između standardne devijacije portfolija i standardne devijacije ponderisanog proseka jednaka 0. Odnosno, mogućnosti diverzifikacije ne postoje kada je koeficijent korelacije jednak 1.

c) $\sigma_p^2 = (0.63 \times 0.830662)^2 + (0.37 \times 1.245994)^2 + 2(0.63 \times 0.830662)(0.37 \times 1.245994) \times 1 = 0.96891525$

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0.96891525} = 0.984334928$$

Standardna devijacija portfolija računata na bazi ponderisanog proseka:

$$\sigma_p = 0.63 \times 0.830662 + 0.37 \times 1.24599 = 0.984334928$$

Vidimo da je razlika između standardne devijacije portfolija i standardne devijacije ponderisanog proseka jednaka 0. Odnosno, mogućnosti diverzifikacije ne postoje kada je koeficijent korelacije jednak 1.

$$d) \sigma_p^2 = (0.94 \times 0.830662)^2 + (0.06 \times 1.245994)^2 + 2(0.94 \times 0.830662)(0.06 \times 1.245994) \times 1 = 0.732021$$

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0.732021} = 0.855582258$$

Standardna devijacija portfolija računata na bazi ponderisanog proseka:
 $\sigma_p^2 = 0.94 \times 0.830662 + 0.06 \times 1.24599 = 0.855582258$

Vidimo da je razlika između standardne devijacije portfolija i standardne devijacije ponderisanog proseka jednaka 0. Odnosno, mogućnosti diverzifikacije ne postoje kada je koeficijent korelacije jednak 1.

Zaključak: Ovim primerom dokazano je da mogućnosti za diverzifikaciju, odnosno umanjeње rizika, ne postoje kada je koeficijent korelacije 1, bez obzira koliki su odeli tih instrumenata u portfoliju.

II) Šarpov racio portfolija uz pretpostavku različitih udela:

Da bismo izračunali Šarpov racio, prvo računamo stopu prinosa portfolia koja je jednaka ponderisanom proseku pojedinačnih prinosa na hartije od vrednosti koje ulaze u portfolio, odnosno: $r_p = W_A r_A + W_B r_B$.

Stope prinosa portfolia, uz pretpostavku različitih udela su sledeći:

- a) $r_p = W_A r_A + W_B r_B = 0.25 \times 4.1 + 0.75 \times 6.15 = 5.6375\%$
- b) $r_p = W_A r_A + W_B r_B = 0.47 \times 4.1 + 0.53 \times 6.15 = 5.1865\%$
- c) $r_p = W_A r_A + W_B r_B = 0.63 \times 4.1 + 0.37 \times 6.15 = 4.8585\%$
- d) $r_p = W_A r_A + W_B r_B = 0.94 \times 4.1 + 0.06 \times 6.15 = 4.223\%$

Šarpov racio se računa na sledeći način:

Sharpe ratio = $\frac{r_p - r_f}{\sigma_p}$; gde je r_p prinos portfolia, r_f je bezrizičina kamatna stopa za koju ćemo pretpostaviti da je 0 (zbog lakšeg proračuna), i σ_p je standardna devijacija portfolia.

Prema tome, Šarpov racio za 4 različite varijante iznosi:

$$a) \text{ Sharpe ratio} = \frac{5.6375}{1.142160781} = 4.9358$$

$$b) \text{ Sharpe ratio} = \frac{5.1865}{1.050787919} = 4.9358$$

$$c) \text{ Sharpe ratio} = \frac{4.8585}{0.984334928} = 4.9358$$

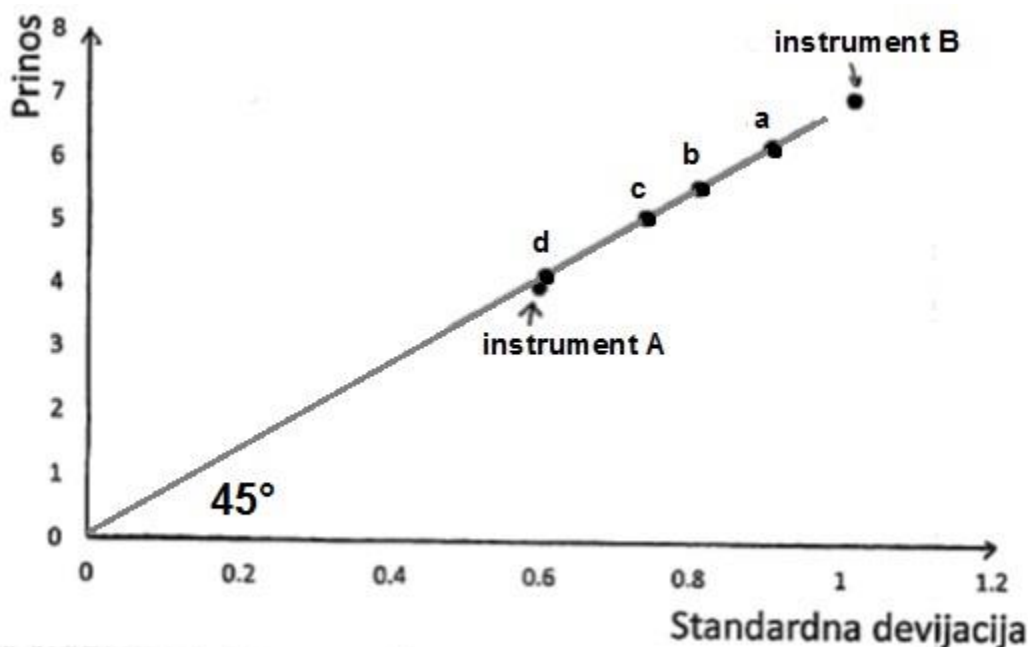
$$d) \text{ Sharpe ratio} = \frac{4.223}{0.855582258} = 4.9358$$

Komentar: Kada je korelacija između dva instrumenta 1, onda je Šarpov rasio također nepromenjen, bez obzira koliki su udeli instrumenata u portfoliju. Drugim rečima, prinosi portfolia i standardna devijacija portfolia se savršeno upravo srazmerno menjaju (rastu ili opadaju) kada je nivo korelacije dva instrumenta 1.

ZADATAK 19 – ucrtavanje Šarpovih racia na grafikon kada je korelacija 1

Na bazi rezultata iz prethodnog zadatka (zadatka 17) nacrtajte grafikon i dokažite tvrdnju da se svi Šarpovi racii nalaze na jednoj istoj liniji. Prokomentarišite grafikon.

Rešenje:



Komentar: Izračunate vrednosti Šarpovih racia su nepromenjene kada je korelacija jednaka 1, bez obzira koliki su udeli pojedinačnih instrumenta u portfoliju. To znači da se sve tačke Šarpovih racia nalaze na jednoj pravoj liniji pod uglom od 45°, iz čega se da zaključiti da se prinosi i rizici savršeno srazmerno menjaju, a Šarpov rasio ostaje nepromenjen. Pozitivan nagib linije na kojoj se nalaze Šarpovi racii potvrđuje tvrdnju da veći prinos podrazumeva veći rizik, i obrnuto.