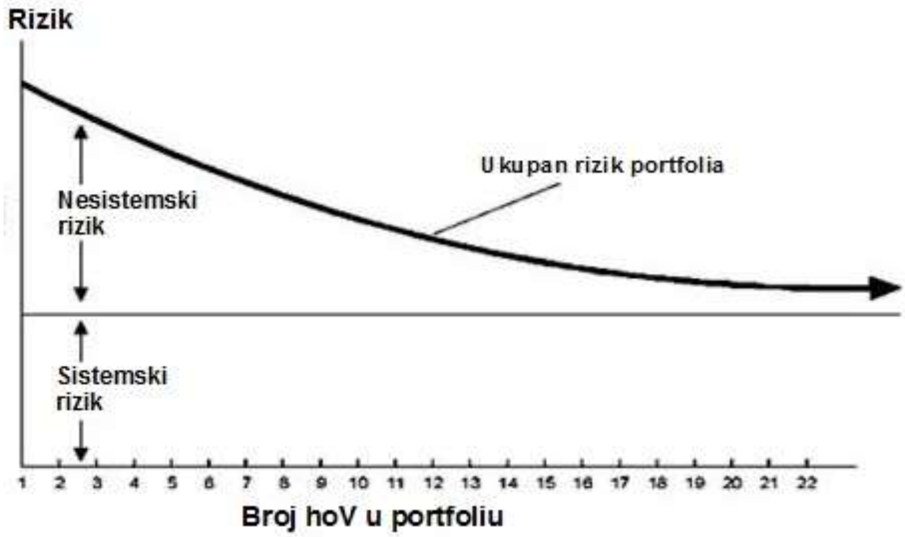
6. PORTFOLIO

6.1.PRINOS I VARIJANSA PORTFOLIJA I ŠARPOV RACIO

Portfolio je skup dve ili više HoV, u koje investitor istovremeno ulaže sa ciljem smanjenja rizika ulaganja i povećanja prinosa. Rizik portfolija se izražava na isti način kao i rizik samo jednog instrumenta, tj. preko varijanse i standardne devijacije, stim što je postupak proračuna varijanse portfolija drugačiji od postupka proračuna varijanse jednog instrumenta. Kao što je ranije rečeno, diverzifikacija smanjuje nesistemski ili specifičan rizik ulaganja, dok na sistemski rizik (β) reaguje svaka kompanija u manjoj ili većoj meri, a sistemski rizik portfolija je ponderisani prosek beti svih akcija u portfoliju. Prema tome, i izloženost sistemskom riziku može biti umanjena, ali ne može biti anulirana, jer sve kompanije reaguju na sistemski rizik. O nesistemskom i sistemskom riziku je govoreno u poglavlju 3 kada smo računali β kao meru sistemskog rizika, a slika 6.1 prikazuje nesistemski i sistemski rizik i njihovu promenu sobzirom na broj HoV u portfoliju. U ovom poglavlju će se objašnjavati principi sastavljanja portfolija na bazi dva instrumenta.

Slika 6.1. Grafički prikaz sistemskog i nesistemskog rizika



Izvor: delo autora.

Kada se razmišlja o alokaciji sredstava unutar portfolija, onda se dva osnovna pitanja postavljaju – u koje HoV uložiti sredstva i koliko uložiti u svaku HoV, odnosno koliki će udeo ulaganja biti u svaku HoV. U odgovoru na ovo pitanje, jako bitnu ulogu ima nivo korelacije između dva instrumenta. Da se potsetimo, korelacija je veličina koja govori o uzajamnom kretanju prinosa dva instrumenta, i što je korelacija niža, odnosno bliža nuli, diverzifikacija je uspešnija. Još bolja situacija je ako je korelacija negativna između dva instrumenta, međutim takvi instrumenti su retki u praksi. Zašto je bitno da je korelacija između dva instrumenta niska? Niska korelacija je bitna zato što je onda to indikator da će se prinosi između dva instrumenta kretati nesinhrono ili čak poništavati ako je korelacija negativna, čime će se smanjiti ukupan rizik portfolija. Neke osnovne i važne činjenice vezane za portfolio su:

1) Stopa prinosa portfolija je jednaka ponderisanom proseku pojedinačnih prinosa na hartije od vrednosti koje ulaze u portfolio, a ponderi su udeli pojedinačnih HoV u portfoliju. To se računa prema izrazu (6.1):

$$r_p = W_A r_A + W_B r_B \tag{6.1}$$

Gde je r_p prinos portfolija, a r_A i r_B su prinosi pojedinačnih HoV (A i B). W_A i W_B su ideli pojedinačnih HoV u portfoliju (eng. *weight*).

2) Varijansa portfolija dva instrumrenta je zbir kvadriranih ponderisanih standardnih devijacija dva instrumenta u portfoliju, koji je uvećan za 2× proizvod ponderisanih standardnih devijacija i koeficijenta korelacije ta dva instrumenta. Ponderi su udeli dva instrumenta u portfoliju. **Jako je bitno zapamtiti da varijasa portfolija nikako nije ponderisani prosek varijansi dva instrumenta.** Prema tome, varijansa portfolija se računa prema izrazu (6.2):

$$\sigma_p^2 = (W_A\sigma_A)^2 + (W_B\sigma_B)^2 + 2(W_A\sigma_A)(W_B\sigma_B)\rho_{AB} \tag{6.2}$$

Gde je σ_p^2 varijansa portfolija, σ_A i σ_B su standardne devijacije HoV (A i B), a ρ_{AB} je koeficijent korelacije između HoV u portfoliju (A i B).

Standardna devijacija portfolija je koren iz varijanse portfolija: $\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2}$.

Izraz $2(W_A\sigma_A)(W_B\sigma_B)\rho_{AB}$ može da se napiše i kao $2W_AW_BCOV(r_A, r_B)$, jer je $\rho_{AB} = \frac{COV(r_A, r_{B)}}{\sigma_A \times \sigma_B}$, odnosno $COV(r_A, r_{B)} = \rho_{AB} \times \sigma_A \times \sigma_B$.

3) Dokle god je koeficijent korelacije manji od jedan, mogućnosti za diverzifikaciju postoje, odnosno tada je varijansa portfolija manja nego ponderisani prosek pojedinačnih varijansi HoV koje ulaze u portfolio. Kada je koeficijent korelacije $\rho_{AB} = 1$, onda mogućnosti korelacije više ne postoje i tada je varijansa portfolija ista kao i ponderisani prosek varijansi dva instrumenta koja ulaze u portfolio. Takođe, kada je koeficijent korelacije 1, onda je varijansa portfolija ista kao i ponderisani prosek varijansi dva instrumenta koja ulaze u portfolio bez obzira koliki su udeli dva instrumenta u portfoliu.

ZADATAK 16 – računanje varijanse portfolija sa različitim nivoom korelacije

Dokažite tvrdnju da je varijansa portfolija manja od ponderisanih varijansi dve HoV koji ulaze u portfolio, ako je koeficijent korelacije između dve HoV manji od 1. Standardne devijacije instrumenata A i B su: $\sigma_A = 0{,}15$, $\sigma_A = 0{,}19$, a koeficijenti korelacije između ta dva instrumenta su sledeća: a) 60%, b) 15%, c) 0%, d) 100%, e) -30%. Udeo instrumenta A u portfoliju iznosi 45%, a instrumenta B 55%. U kom scenariju će varijansa portfolija biti najmanja?

Rešenje:
Osenčene i boldovane vrednosti u jednačinama za računanje varijanse portfolija su koeficijenti korelacije, da bi se lakše uočili, jer se oni menjaju u izrazu za varijansu portfolija (σ_p^2). Pošto postoji 5 različitih koeficijenata korelacije, za svaki će se izračunati varijansa portfolija prema izrazu (6.2).

a) $\sigma_p^2 = (0.45 \times 0.15)^2 + (0.55 \times 0.19)^2 + 2(0.45 \times 0.15)(0.55 \times 0.19) \times \mathbf{0.6} =$
= 0.00456 + 0.01092 + 2 × 0.00675 + 0.1045 × 0.6 = 0.023941
$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0.023941} = 0.1547$

b) $\sigma_p^2 = (0.45 \times 0.15)^2 + (0.55 \times 0.19)^2 + 2(0.45 \times 0.15)(0.55 \times 0.19) \times \mathbf{0.15} =$
= 0.00456 + 0.01092 + 2 × 0.00675 + 0.1045 × 0.15 = 0.017593
$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0.017593} = 0.1326$

c) $\sigma_p^2 = (0.45 \times 0.15)^2 + (0.55 \times 0.19)^2 + 2(0.45 \times 0.15)(0.55 \times 0.19) \times \mathbf{0} =$
= 0.00456 + 0.01092 + 2 × 0.00675 + 0.1045 × 0 = 0.015477
$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0.015477} = 0.1244$

d) $\sigma_p^2 = (0.45 \times 0.15)^2 + (0.55 \times 0.19)^2 + 2(0.45 \times 0.15)(0.55 \times 0.19) \times \mathbf{1} =$
= 0.00456 + 0.01092 + 2 × 0.00675 + 0.1045 × 1 = 0.029584
$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0.029584} = 0.172$

e) $\sigma_p^2 = (0.45 \times 0.15)^2 + (0.55 \times 0.19)^2 + 2(0.45 \times 0.15)(0.55 \times 0.19) \times \mathbf{(-0.3)} =$
= 0.00456 + 0.01092 + 2 × 0.00675 + 0.1045 × (-0.3) = 0.011244
$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0.011244} = 0.106$

Odgovor: Na bazi rezultata može se videti da je najmanja varijasa portfolia ($\sigma_p = 0.106$) kad je korelacija između dva instrumenta -0.3, što ukazuje da se, u ovom slučaju, prinosi između dva instrumenta u najvećem stepenu poništavaju, čime se smanjuje rizik, ili standardna devijacija portfolija. Takođe, moguće je primetiti da što je korelacija manja od 1, time je standardna devijacija portfolija manja, odnosno rizik portfolija je manji, što onda ukazuje da je diverzifikacija portfolija bolja.

Druga tvrdnja koju treba dokazati je ta da je ponderisani prosek dve varijanse (ili standardne devijacije) veći od varijanse (standarne devijacije) portfolija kada je korelacija manja od 1, a kada je korelacija 1, onda je ponderisani prosek dve varijanse jednak varijansi portfolija. Sve jedno je da li se uzimaju u obzir varijanse ili standardne devijacije, princip ostaje isti. Prema tome, ponderisani prosek standardnih devijacija pojedinačnih instrumenata iznosi:

$$W_A\sigma_A + W_B\sigma_B = 0.45 \times 0.15 + 0.55 \times 0.19 = 0.172$$

U skladu sa tim, možemo uporediti ponderisanu standardnu devijaciju dva instrumenta sa standardnom devijacijom portfolija koje su izračunate:

a) $W_A\sigma_A + W_B\sigma_B = 0.172 > \sigma_p = 0.1547$
b) $W_A\sigma_A + W_B\sigma_B = 0.172 > \sigma_p = 0.1326$
c) $W_A\sigma_A + W_B\sigma_B = 0.172 > \sigma_p = 0.1244$
d) $W_A\sigma_A + W_B\sigma_B = 0.172 = \sigma_p = 0.172$
e) $W_A\sigma_A + W_B\sigma_B = 0.172 > \sigma_p = 0.106$

Tvrdnja je dokazana, odnosno u 4 od 5 slučajeva, standardna devijacija portfolija je manja od ponderisanog proseka dve standardne devijacije, sem u slučaju kad je korelacija 1, a to je slučaj (d). Tada je standardna devijacija portfolija ista kao i ponderisani prosek dve standardne devijacije, što nam govori da tada diverzifikacija nije moguća.

ZADATAK 17 – ucrtavanje portfolija u grafikon koji imaju različite nivoe korelacije

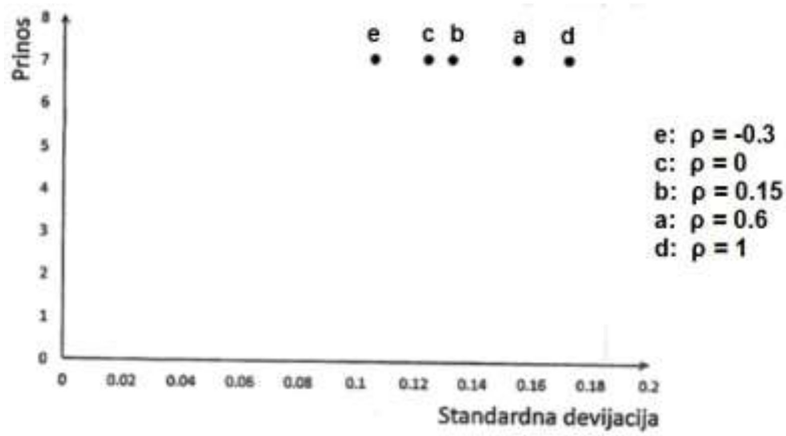
Na bazi podataka iz prethodnog zadatka (zadatka 15) ucrtajte tačke različitih portfolija na grafikon, ako je stopa prinosa instrumenta A = 6%, a stopa prinosa instrumenta B = 8%. Udeli instrumenata A i B u portfoliju su isti kao i u zadatku 15, odnosno udeo instrumenta A u portfoliju iznosi 45%, a instrumenta B 55%. Prokomentarišite grafikon.

Rešenje:

Da bismo mogli da ucrtamo različite portfolije u grafikon, prvo moramo da izračunamo stopu prinosa portfolija, jer svaki portfolio ima dve vrednosti: prinos na Y osi i rizik, odnosno standardnu devijaciju na X osi. Stopa prinosa portfolija (r_p) je ista za sve varijante različitih korelacija, pošto je stopa prinosa jednaka ponderisanom proseku pojedinačnih prinosa na hartije od vrednosti koje ulaze u portfolio, odnosno koeficijent korelacije ne igra ulogu pri izračunavanju stope prinosa portfolija. Prinos portfolija se računa kao u jednačini (6.1):

$r_p = W_A r_A + W_B r_B = 0.45 \times 6 + 0.55 \times 8 = 7.1$

Ucrtani portfoliji izgledaju:



Komentar: Ucrtavanjem tačaka portfolija sa različitim korelacijama između instrumenata A i B, možemo zaključiti da što je korelacija manja između dva instrumenta to je tačka na grafikonu pomerena više ulevo, ka nuli. Drugim rečima, na ovaj način se vizuelno vidi da je rizik portfolija manji sa smanjenjem korelacije između dva instrumenta koji ulaze u taj portfolio. Pri tome, sve tačke se nalaze na istoj horizontalnoj liniji, jer se prinosi na razlikuju bez obzira koliki je koeficijent korelacije.

ŠARPOV RACIO:

Kada investitori donose odluku u kakav portfolio da plasiraju svoja sredstva, onda rizik, u obliku standardne devijacije portfolija, igra važnu ulogu, ali takođe investitor vodi računa i o prinosu portfolija, jer se preko prinosa portfolija u suštini izražava zarada investitora. Generalno, viši rizik podrazumeva veći prinos, i obrnuto. Međutim, ove dve veličine nisu savršeno korelirane, te je moguće da od dve akcija koje imaju isti prinos jedna ima veći rizik od druge. Finansijski pokazatelj koji uzima u obzir obe veličine se naziva Šarpov racio i računa se kao u jednačini (6.3):

$$Sharpe\ ratio = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p} \tag{6.3}$$

Gde je r_p prinos portfolija, r_f je bezrizična kamatna stopa, i σ_p je standardna devijacija portfolija. Što je Šarpov racio veći, to je veća nagrada investitoru za preuzeti rizik, i takav portfolio je bolji od portfolija koji ima niži Šarpov racio. Ako je koeficijent korelacije 1, onda se Šarpov racio ne menja bez obzira koliki su udeli dva instrumenta u portfoliju.

<u>ZADATAK 18:</u> – izračunavanje varijanse portfolija i Šarpov racio, kada je korelacija jednaka jedinici, a udeli u portfolijima su različiti

Izračunajte pod I) varijansu portfolija, i pod II) odnos između prinosa i rizika (tzv. Šarpov racio) ako su udeli instrumenta A u portfoliju: a) 25%, b) 47%, c) 63% i d) 94%, a prinosi instrumenata A i B su dati u sledećoj tabeli. Protumačite rezultate. Takođe, izračunajte koeficijent korelacije između dve akcije i protumačite ga.

	Verovatnoća P_i	Prinos kompanije A (R_{Ai})	Prinos kompanije B (R_{Bi})
Ekspanzija	0,3	4	7
Normalan rast	0,4	4.6	8.05
Recesija	0,3	3.38	6.44

Rešenje:

Da bismo izračunali varijansu portfolija preko jednačine (6.2), potrebno je da znamo varijanse, odnosno standardne devijacije, pojedinačnih instrumenata i koeficijent korelacije između ta dva instrumenta. Nijedna od te tri veličine nije data, što znači da moramo da ih izračunamo. Da bismo došli do koeficijenta korelacije, potrebna nam je kovarijansa.

Kovarijansa se računa preko formule:

$$COV(R_{A,}R_B) = \sum_{i=1}^{n} \left[(R_A - E(R_A) \times (R_B - E(R_B)) \times P_i \right]$$

Za lakši račun možemo koristiti tabelu u kojoj se računaju elementi potrebni za izračunavanje kovarijanse i koeficijenta korelacije:

Verovatnoća P_i	Prinos R_A	Prinos R_B	Odstupanje od očekivanog prinosa R_A-$E(R_A)$	Odstupanje od očekivanog prinosa R_B-$E(R_B)$	Kvadrat odstupanja od očekivanog prinosa $(R_A-E(R_A))^2$	Kvadrat odstupanja od očekivanog prinosa $(R_B-E(R_B))^2$	$COV(R_A,R_B)$
0.3	4	6	-0.1	-0.15	0.01	0.0225	0.0045
0.4	5	7.5	0.9	1.35	0.81	1.8225	0.486
0.3	3	4.5	-1.1	-1.65	1.21	2.7225	0.5445
Σ					0.69	1.5525	1.035

Očekivani prinos akcije A i B:

$E(R_A) = P_{Ai} \times R_{Ai} = 0.3 \times 4 + 0.4 \times 5 + 0.3 \times 3 = 4.1$

$E(R_B) = P_{Bi} \times R_{Bi} = 0.3 \times 6 + 0.4 \times 7.5 + 0.3 \times 4.5 = 6.15$

COV (R_A,R_B)= [0.3 × (-0.1) × (-0.15)] + [0.4 × 0.9 × 1.35] + [0.3 × (-1.1) ×(-1.65)] = 1.035

Standardne devijacije oba instrumenta su:

$\sigma_A = \sqrt{\sigma_A^2} = \sqrt{0.69} = 0.830662$

$\sigma_B = \sqrt{\sigma_B^2} = \sqrt{1.5525} = 1.245994$

Pošto imamo sve elemente, možemo izračunati koeficijent korelacije:

$$\rho_{AB} = \frac{COV_{AB}}{\sigma_A \times \sigma_B} = \frac{1.035}{0.830662 \times 1.5525} = \frac{1.035}{1.035} = 1$$

Varijanse i standardne devijacije portfolija se računaju prema izrazu (6.2):

$\sigma_p^2 = (W_A\sigma_A)^2 + (W_B\sigma_B)^2 + 2(W_A\sigma_A)(W_B\sigma_B)\rho_{AB}.$

I) Uz pretpostavku različitih udela, varijanse i standardne devijacije portfolija su:

a) $\sigma_P^2 = (0.25 \times 0.830662)^2 + (0.75 \times 1.245994)^2 + 2(0.25 \times 0.830662)(0.75 \times 1.245994) \times 1 = 1.30453125$

$\sigma_P = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{1.30453125} = 1.142160781$

Standardna devijacija portfolija računata na bazi ponderisanog proseka:

$\sigma_P = W_A\sigma_A + W_B\sigma_B = 0.25 \times 0.830662 + 0.75 \times 1.24599 = 1.142160781$

Vidimo da je razlika između standardne devijacije portfolija i standardne devijacije ponderisanog proseka jednaka 0. Odnosno, mogućnosti diverzifikacije ne postoje kada je koeficijent korelacije jednak 1, što je već dokazano u zadatku 16.

b) $\sigma_P^2 = (0.47 \times 0.830662)^2 + (0.53 \times 1.245994)^2 + 2(0.47 \times 0.830662)(0.53 \times 1.245994) \times 1 = 1.10415525$

$\sigma_P = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{1.10415525} = 1.050787919$

Standardna devijacija portfolija računata na bazi ponderisanog proseka:

$\sigma_p = 0.47 \times 0.830662 + 0.53 \times 1.24599 = 1.050787919$

Vidimo da je razlika između standardne devijacije portfolija i standardne devijacije ponderisanog proseka jednaka 0. Odnosno, mogućnosti diverzifikacije ne postoje kada je koeficijent korelacije jednak 1.

c) $\sigma_P^2 = (0.63 \times 0.830662)^2 + (0.37 \times 1.245994)^2 + 2(0.63 \times 0.830662)(0.37 \times 1.245994) \times 1 = 0.96891525$

$\sigma_P = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0.96891525} = 0.984334928$

Standardna devijacija portfolija računata na bazi ponderisanog proseka:
$\sigma_p = 0.63 \times 0.830662 + 0.37 \times 1.24599 = 0.984334928$

Vidimo da je razlika između standardne devijacije portfolija i standardne devijacije ponderisanog proseka jednaka 0. Odnosno, mogućnosti diverzifikacije ne postoje kada je koeficijent korelacije jednak 1.

d) $\sigma_p^2 = (0.94 \times 0.830662)^2 + (0.06 \times 1.245994)^2 + 2(0.94 \times 0.830662)(0.06 \times 1.245994) \times 1 = 0.732021$
$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0.732021} = 0.855582258$

Standardna devijacija portfolija računata na bazi ponderisanog proseka:
$\sigma_p^2 = 0.94 \times 0.830662 + 0.06 \times 1.24599 = 0.855582258$

Vidimo da je razlika između standardne devijacije portfolija i standardne devijacije ponderisanog proseka jednaka 0. Odnosno, mogućnosti diverzifikacije ne postoje kada je koeficijent korelacije jednak 1.

Zaključak: Ovim primerom dokazano je da mogućnosti za diverzifikaciju, odnosno umanjenje rizika, ne postoje kada je koeficijent korelacije 1, bez obzira koliki su odeli tih instrumenata u portfoliju.

II) Šarpov racio portfolija uz pretpostavku različitih udela:

Da bismo izračunali Šarpov racio, prvo računamo stopu prinosa portfolija koja je jednaka ponderisanom proseku pojedinačnih prinosa na hartije od vrednosti koje ulaze u portfolio, odnosno: $r_p = W_A r_A + W_B r_B$.

Stope prinosa portfolija, uz pretpostavku različitih udela su sledeći:

a) $r_p = W_A r_A + W_B r_B = 0.25 \times 4.1 + 0.75 \times 6.15 = 5.6375\%$
b) $r_p = W_A r_A + W_B r_B = 0.47 \times 4.1 + 0.53 \times 6.15 = 5.1865\%$
c) $r_p = W_A r_A + W_B r_B = 0.63 \times 4.1 + 0.37 \times 6.15 = 4.8585\%$
d) $r_p = W_A r_A + W_B r_B = 0.94 \times 4.1 + 0.06 \times 6.15 = 4.223\%$

Šarpov racio se računa na sledeći način:

$Sharpe\ ratio = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p}$; gde je r_p prinos portfolia, r_f je bezrizičina kamatna stopa za koju ćemo pretpostaviti da je 0 (zbog lakšeg proračuna), i σ_p je standardna devijacija portfolija.

Prema tome, Šarpov racio za 4 različite varijante iznosi:

a) $Sharpe\ ratio = \frac{5.6375}{1.142160781} = 4.9358$

b) $Sharpe\ ratio = \frac{5.1865}{1.050787919} = 4.9358$

c) $Sharpe\ ratio = \frac{4.8585}{0.984334928} = 4.9358$

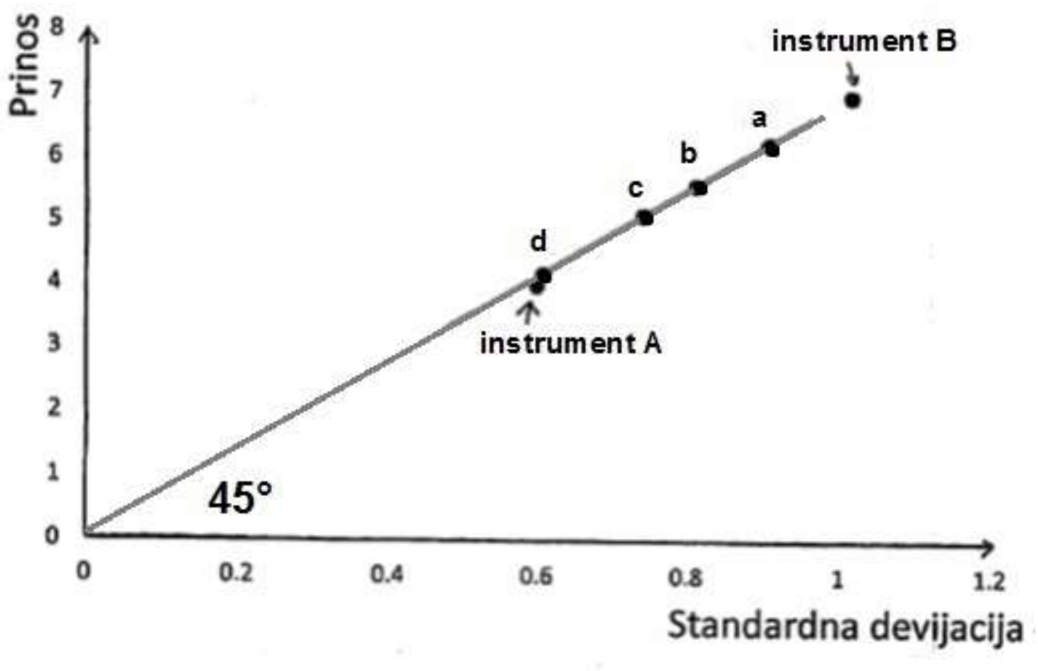
d) $Sharpe\ ratio = \frac{4.223}{0.855582258} = 4.9358$

Komentar: Kada je korelacija između dva instrumenta 1, onda je Šarpov racio takođe nepromenjen, bez obzira koliki su udeli instrumenata u portfoliju. Drugim rečima, prinosi portfolija i standardna devijacija portfolija se savršeno upravo srazmerno menjaju (rastu ili opadaju) kada je nivo korelacije dva instrumenta 1.

ZADATAK 19 – ucrtavanje Šarpovih racia na grafikon kada je korelacija 1

Na bazi rezultata iz prethodnog zadatka (zadatka 17) nacrtajte grafikon i dokažite tvrdnju da se svi Šarpovi racii nalaze na jednoj istoj liniji. Prokomentarišite grafikon.

Rešenje:



Komentar: Izračunate vrednosti Šarpovih racia su nepromenjene kada je korelacija jednaka 1, bez obzira koliki su udeli pojedinačnih instrumenta u portfoliju. To znači da se sve tačke Šarpovih racia nalaze na jednoj pravoj liniji pod uglom od 45°, iz čega se da zaključiti da se prinosi i rizici savršeno srazmerno menjaju, a Šarpov racio ostaje nepromenjen. Pozitivan nagib linije na kojoj se nalaze Šarpovi racii potvrđuje tvrdnju da veći prinos podrazumeva veći rizik, i obrnuto.