6.2. PORTFOLIJO MINIMALNE VARIJANSE

Prethodni zadaci koji su rađeni su polazili od toga da su udeli dva instrumenta dati. Međutim, u praksi je upravo to što treba da se utvrdi kako bi investitor ostvario svoje ciljeve. U literaturi koja se bavi portfolijo finansijama, postoji formula preko koje je moguće izračunati udeo sekundarnog instrumenta u portfoliju od dva instrumenta, koji kreira tzv. portfolijo minimalne varijanse (MVP, eng. *minimum variance portfoli*o), odnosno to je portfolijo koji ima najmanju varijansu ili najmanji rizik. Drugim rečima, od ovog portfolija nijedan drugi portfolijo sa drugim udelima nema manji rizik i zato se on zove portfolijo minimalne varijanse. Formula preko koje se računa udeo sekundarnog instrumenta u portfoliju minimalne varijanse od dva instrumenta glasi:

$$W_{MVP}^{S}=\frac{\sigma_P^2-COV_{P,S}}{\sigma_P^2+\sigma_S^2-2COV_{P,S}} \tag{6.4}$$

Uz uslov: $$W_{MVP}^{S}=\begin{cases} 0, & ako \quad W^S<0 \\ W^S, & ako \quad 0\le W^S\le 1 \\ 1, & ako \quad W^S>0 \end{cases} \tag{6.5}$$

Oznaka W^Spredstavlja udeo (eng. weight) sekundarnog instrumenta (S) u portfoliju od dva instrumenta, gde je udeo primarnog instrumenta onda: $W_{MVP}^{P}=1-W_{MVP}^{S}$. Uslovi u izrazu 6.5 govore da ako je izračunati udeo (W^S) prema jednačini (1) manji od nule onda je udeo sekundarnog instrumenta 0, ako je veći od 1 onda je 1, a ako je između 0 i 1 onda je veličina udela onolika koliko je izračunata prema jednačini 6.4. Simbol σ_P^2 označava varijansu primarnog instrumenta, simbol σ_S^2 označava varijansu sekundarnog instrumenta, a simbol $COV_{P,S}$ označava kovarijansu dva instrumenta. Prilikom računanja udela sekundarnog instrumenta u porfoliju, pravilo je da se za sekundarni instrument bira onaj koji je manje rizičan od primarnog instrumenta.

Kada se napravi portfolijo, onda je korisno uporediti njegove performanse sa aspekta rizika u odnosu na nediverzifikovanu investiciju. To se meri preko tzv. indeksa efikasnosti hedžiranja (HEI – eng. *hedge effectiveness index*), a on se računa preko izraza (6.6).

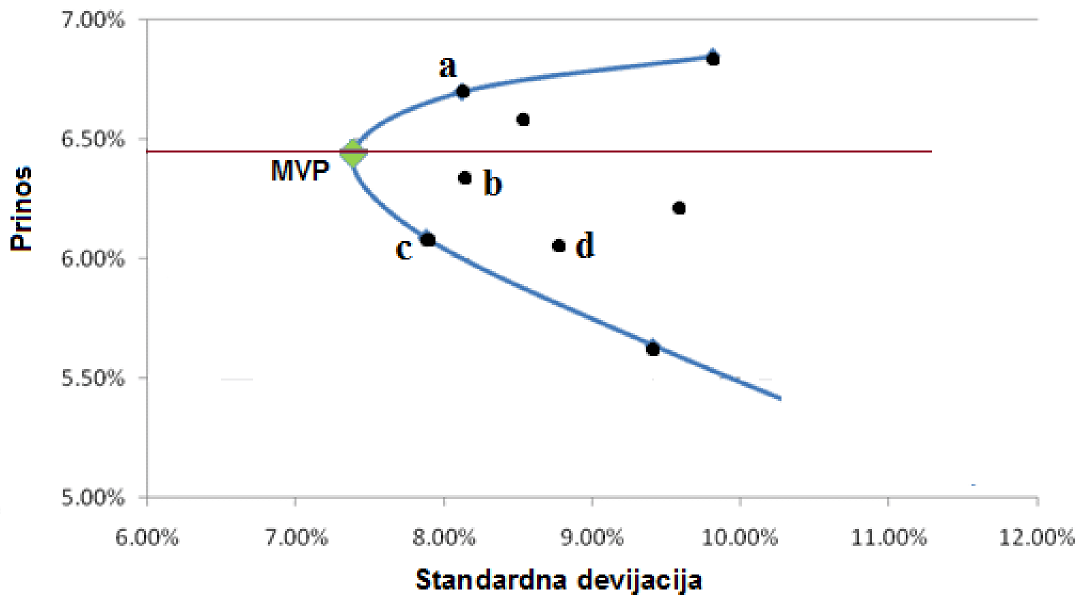
$$HEI=\frac{\sigma_{NEHEDŽIRANA}^2-\sigma_{HEDŽIRANA}^2}{\sigma_{NEHEDŽIRANA}^2} \tag{6.6}$$

Pokazatelj HEI posmatra odnos varijanse nehedžiranog ulaganja (tj. ulaganja samo u primarni instrument) i varijanse portfolija, koji je hedžirana investicija (tj. ulaganje u dva instrumenta). Ako see HEI vrednost kreće u intervalu od 0 do 1, a HEI ≠ 0, to znači da je rizik portfolija umanjen konstrukcijom portfolija u skladu sa udelima računatim prema formuli za MVP. Ako je HEI indeks bliži jedinici, to je hedžiranje bolje, pri čemu ako je HEI = 1, onda je rizik maksimalno umanjen. HEI od 1 je samo teorijska vrednost i u praksi se ne dešava. Sa druge strane, ako se dobije negativna HEI vrednost onda to znači da nehedžirano ulaganje ima niži rizik od hedžiranog ulaganja, odnosno to znači da ne treba kombinovati primarni instrument sa sekundarnim instrumentom. HEI indeks ne može da bude veći od 1.

LINIJA EFIKASNOSTI PORTFOLIJA:

Kada govorimo o kombinaciji udela dva instrumenta u portfoliju, onda treba reći da pored portfolija minimalne varijanse (MVP) postoje i oni portfoliji koji su efikasni i oni koji su neefikasni. Svi ti portfoliji se prikazuju preko tzv. **Efikasne granične linije** (eng. *efficient frontier line*) portfolija, a njenu ilustraciju možemo videti na slici 6.2. Slika 6.2. nam prikazuje prinos (Y osa) i standardnu devijaciju (X osa) više portfolija, koji su obeleženi crnim tačkama. Zakrivljenom plavom linijom su prikazani svi portfoliji koji imaju granične (najbolje) kombinacije prinosa i rizika. Na mestu zakrivljenja efikasne granične linije je ucrtan portfolijo minimalne varijanse, koji ima najmanji rizik od svih mogućih portfolija, odnosno MVP. Taj portfolijo ima najmanju varijansu i određeni prinos, a moguće ga je kreirati preko udela primarnog i sekundarnog instrumenta koje računa izraz (6.4). Svi drugi portfoliji koji se nalaze na plavoj liniji su kreirani sa udelima koji su drugačiji od MVP. Samo može postojati jedan portfolijo koji je MVP. Crvena linija prolazi kroz tačku MVP i deli efikasnu graničnu liniju na dva dela. Gornji deo efikasne granične linije predstavljaju tzv. efikasni portfoliji, a na donjem delu su neefikasni portfoliji. Zašto je to tako? Naime, sve ucrtane tačke na plavoj liniji predstavljaju kombinaciju prinosa i rizika. Međutim, na gornjem delu plave linije se nalaze portfoliji kojima se povećava rizik uz povećanje prinosa. To su tzv. efikasni portfoliji i svaka kombinacija rastućeg prinosa uz rastući rizik predstavlja legitiman izbor investitora. Samo od averzije investitora prema riziku zavisi da li će biti izabran portfolio bliže tački MVP ili dalje od nje. Sa druge strane, sve kombinacije ispod crvene linije predstavljaju neefikasne portfolije, jer je kod njih povećanje rizika praćeno smanjenjem prinosa, što bi odvratilo svakog racionalnog investitora. Tačke koje se nalaze unutar efikasne granične linije, predstavljaju pozicije, odnosno prinose i rizike instrumenata koji ulaze u portfolijo. Sve tačke unutar plave linije, a iznad horizontalne crvene linije su manje efikasno ulaganje od portfolija koji se nalaze na gornjem delu plave linije. To je zbog toga što je kod njih rizik veći nego kod portfolija koji se nalazi na plavoj liniji sa istim prinosom (tačka d u odnosu na c), ili je prinos manji nego kod portfolija na plavoj liniji sa istim nivoom rizika (tačka b u odnosu na a). Prema tome, svi portfoliji sa različitim udelima od dva instrumenta se nalaze na plavoj liniji, tj. liniji efikasnih portfolija, a tačke unutar plave linije su pojedinačni instrumenti koji ulaze u portfolio, i koje imaju svoj prinos i rizik. Sledeći zadatak daje primer računanja portfolija minimalne varijanse.

Slika 6.2. Linija efikasnosti portfolija



Izvor: delo autora.

<u>ZADATAK 20</u> – konstrukcija portfolija sa minimalnom varijansom

Investitor ulaže primarno u američki indeks S&P500. U cilju smanjenja rizika, investitor odlučuje da kombinuje S&P500 indeks sa ulaganjem u zlato. Odredite koliki bi udeo zlata trebao da bude u MVP od dva instrumenta. Takođe, utvrdite kolika je varijansa portfolija i njegov prinos. Prosečni prinosi S&P500 indeksa i zlata u tri moguća scenarija su dati u sledećoj tabeli:

	Verovatnoća P_i	Prinos indeksa S&P ($R_{S\&P}$)	Prinos zlata (R_{zlato})
Ekspanzija	0,3	8	2
Normalan rast	0,5	5	6
Recesija	0,2	-6	7

Rešenje:

Da bismo mogli da izračunamo udeo sekundarnog instrumenta u MVP, prvo treba da izračunamo varijanse oba instrumenta kako bi videli koji instrument je rizičniji, a rizičniji instrument je primarni instrument u procesu računanja MVP.

Očekivani prinos indeksa S&P500 i zlata su:

$$E(R_{S\&P}) = P_{S\&P,i} \times R_{S\&P,i} = 0{,}3 \times 8 + 0{,}5 \times 5 + 0{,}2 \times (-6) = 3{,}7$$

$E(R_{Gold}) = P_{Gold,i} \times R_{Gold,i} = 0{,}3 \times 2 + 0{,}5 \times 6 + 0{,}2 \times 7 = 5{,}8$

Varijanse i standardne devijacije su:
$\sigma^2_{S\&P}$ = 18,49 × 0,3 + 1,69 × 0,5 + 94,08 × 0,2 = 25,208
σ^2_{Gold}= 14,44 × 0,3 + 0,04 × 0,5 + 1,44 × 0,2 = 4,574
$\sigma_{S\&P} = \sqrt{25{,}208} = 5{,}021$
$\sigma_{Gold} = \sqrt{4{,}574} = 2{,}139$

Pošto je S&P500 indeks rizičniji, on je onda primarni instrument u računanju MVP.

Tabela za računanje kovarijanse

Verovatnoća P_i	Prinos $R_{S\&P}$	Prinos R_{zlato}	Odstupanje $R_{S\&P}$-$E(R_{S\&P})$	Odstupanje R_{zlato}-$E(R_{zlato})$	Kvadrat odstupanja (varijansa) $(R_{S\&P}-E(R_{S\&P}))^2$	Kvadrat odstupanja (varijansa) $(R_{zlato}-E(R_{zlato}))^2$	Kovarijansa $COV(R_{S\&P},R_{zlato})$
0,3	8	2	4,3	-3,8	18,49	14,44	16,34
0,5	5	6	1,3	0,2	1,69	0,04	0,13
0,2	-6	7	-9,7	1,2	94,08	1,44	11,64
Σ					25,208	4.574	7,1

Kovarijansa je:
COV (S&P, Gold)= [0,3 × 4,3 × (-3,8)] + [0,5 × 1,3 × 0,2] + [0,2 × (-9,7) × 1,2] = -4,902 + 0,13 - 2,328 = -7,1

Korelacija je:

$$\rho = \frac{\text{COV (S\&P, Gold)}}{\sigma_{S\&P} \times \sigma_{GOLD}} = \frac{-7{,}1}{5{,}021 \times 2{,}139} = \frac{-7{,}1}{10{,}738} = -0{,}661$$

Udeo sekundarnog instrumenta u MVP prema izrazu (6.4) je:

$$W^S_{MVP} = \frac{\sigma^2_P - COV_{P,S}}{\sigma^2_P + \sigma^2_S - 2COV_{P,S}} = \frac{25{,}208 - (-7{,}1)}{25{,}208 + 4{,}574 - 2 \times (-7{,}1)} = \frac{32{,}308}{43{,}982} = 0{,}7323$$

$\approx 73\%$

Prema jednačini za MVP, investitor bi u proseku trebao da ulaže u zlato 73%, dok bi u indeks S&P500 trebao u proseku da ulaže 1 - 0,73 = 0,27 = 27%. Na ovaj način investitor je došao do portfolija koji ima minimalnu varijansu, odnosno najmanji rizik.

Prinos, varijansa i standardna devijacija portfolija minimalne varijanse (MVP) u tom slučaju su:

$$r_{MVP} = W_P r_P + W_S r_S = 0{,}27 \times 3{,}7 + 0{,}73 \times 5{,}8 = 5{,}233$$

$$\sigma_{MVP}^2 = (W_P\sigma_P)^2 + (W_S\sigma_S)^2 + 2(W_P\sigma_P)(W_S\sigma_S)\rho_{PS} =$$

$$= (0{,}27 \times 5{,}021)^2 + (0{,}73 \times 2{,}139)^2 + 2 \times (0{,}27 \times 5{,}021) \times (0{,}73 \times 2{,}139) \times (-0{,}66) = 1{,}481804$$

$$\sigma_{MVP} = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{1{,}481804} = 1{,}217294$$

Ako bismo hteli da vidimo koliki su prinos i varijansa portfolija, koji nemaju optimalan udeo instrumenata, nego su udeli sekundarnog instrumenta iznad ili ispod udela MVP, npr. 80% i 60%, onda bi te varijanse iznosile:

I) Prinos, varijansa i standardna devijacija portfolija (A) sa udelom sekundarnog instrumenta od 80%:

$$r_A = W_P r_P + W_S r_S = 0{,}20 \times 3{,}7 + 0{,}80 \times 5{,}8 = 5{,}38$$

$$\sigma_A^2 = (0{,}20 \times 5{,}021)^2 + (0{,}80 \times 2{,}139)^2 + 2 \times (0{,}20 \times 5{,}021) \times (0{,}80 \times 2{,}139) \times (-0{,}66) = 1{,}668352$$

$$\sigma_A = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{1{,}668352} = 1{,}291647$$

II) Varijansa i standardna devijacija portfolija (B) sa udelom sekundarnog instrumenta od 60%:

$$r_B = W_P r_P + W_S r_S = 0{,}40 \times 3{,}7 + 0{,}60 \times 5{,}8 = 4{,}96$$

$$\sigma_B^2 = (0{,}40 \times 5{,}021)^2 + (0{,}60 \times 2{,}139)^2 + 2 \times (0{,}40 \times 5{,}021) \times (0{,}60 \times 2{,}139) \times (-0{,}66) = 2{,}27838$$

$$\sigma_B = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{2{,}27838} = 1{,}50943$$

Zaključak: Sva tri portfolija, koji su izračunati uz različite udele S&P500 indeksa i zlata se nalaze na liniji efikasnih portfolija, ali portfolijo A se nalazi na gornjoj polovini linije efikasnih portfolija i on spada u grupu tzv. efikasnih portfolija, a portfolijo B se nalazi na donjoj polovini linije efikasnih portfolija i on je tzv. neefikasni portfolijo. U slučaju portfolija A: njemu je veći rizik od MVP, $\sigma_A = 1{,}291 > \sigma_{MVP} = 1{,}217$, ali takođe su mu veći i prinosi od prinosa MVP, $r_A = 5{,}38 > r_{MVP} = 5{,}233$. Drugim rečima kod efikasnog portfolija dolazi do povećanja i rizika i prinosa. Sa druge strane, kod portfolija B koji je neefikasan, povećanje rizika je praćeno smanjenjem prinosa u odnosu na MVP: $\sigma_B = 1{,}509 > \sigma_{MVP} = 1{,}217$; $r_B = 4{,}96 < r_{MVP} = 5{,}233$. Prema tome, neefikasni portfolijo ostvaruje dvostruki negativni efekat, povećanje rizika uz smanjenje prinosa, što čini taj portfolijo vrlo nepoželjnim za ulaganje.

Nakon izračunavanja varijanse portfolija, moguće je izračunati indeks efikasnosti hedžiranja (HEI) portfolija, odnosno izračunati koliko ulaganje u portfolijo od dva instrumenta umanjuje rizik koji nosi ulaganje samo u primarni insrument.

$$HEI_{MVP} = \frac{\sigma_{S\&P}^2 - \sigma_p^2}{\sigma_{S\&P}^2} = \frac{25{,}208 - 1{,}482}{25{,}208} = 0{,}9412 = 94{,}12\%$$

$$HEI_A = \frac{\sigma_{S\&P}^2 - \sigma_p^2}{\sigma_{S\&P}^2} = \frac{25{,}208 - 1{,}668}{25{,}208} = 0{,}9338 = 93{,}38\%$$

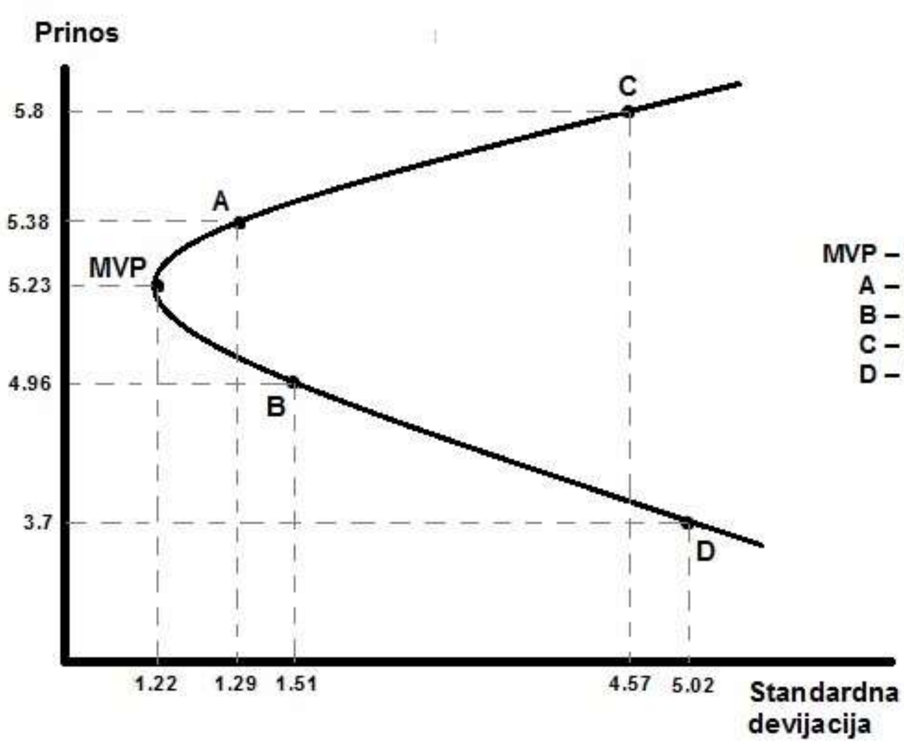
$$HEI_B = \frac{\sigma_{S\&P}^2 - \sigma_p^2}{\sigma_{S\&P}^2} = \frac{25{,}208 - 2{,}278}{25{,}208} = 0{,}9096 = 90{,}96\%$$

Zaključak: Vrednost HEI indeksa je veoma visoka u sva tri primera, što znači da je varijansa portfolija značajno umanjena u odnosu na primarni instrument S&P500 indeks. Drugim rečima, uključivanjem zlata u portfolijo sa S&P500, postignuto je značajno umanjenje rizika S&P500 indeksa. Primetno je da je umanjenje rizika postignuto ulaganjem u sva tri portfolija, odnosno i u efikasni i u neefikasni portfolio, ali ipak je uočljivo da MVP daje najbolje rezultate umanjenja rizika u odnosu na primarni instrument S&P500, gde su udeli zlata 73%, a S&P500 indeksa 27%. Neefikasni portfolio umanjuje rizik od ulaganja samo u primarni instrument za 90,96%, ali taj rezultat je lošiji u odnosu na efikasni portfolio (93,38%) i MVP (94,12%).

<u>ZADATAK 21</u> – Ucrtavanje efikasne granice portfolija

Na bazi zadatka 7, grafički prikažite efikasnu granicu portfolija, ucrtajte MVP, kao i dva portfolija (A i B) koji nemaju minimalnu varijansu. Takođe, ucrtajte pozicije S&P500 indeksa i zlata na grafikonu. Prokomentarišite sliku.

Rešenje:

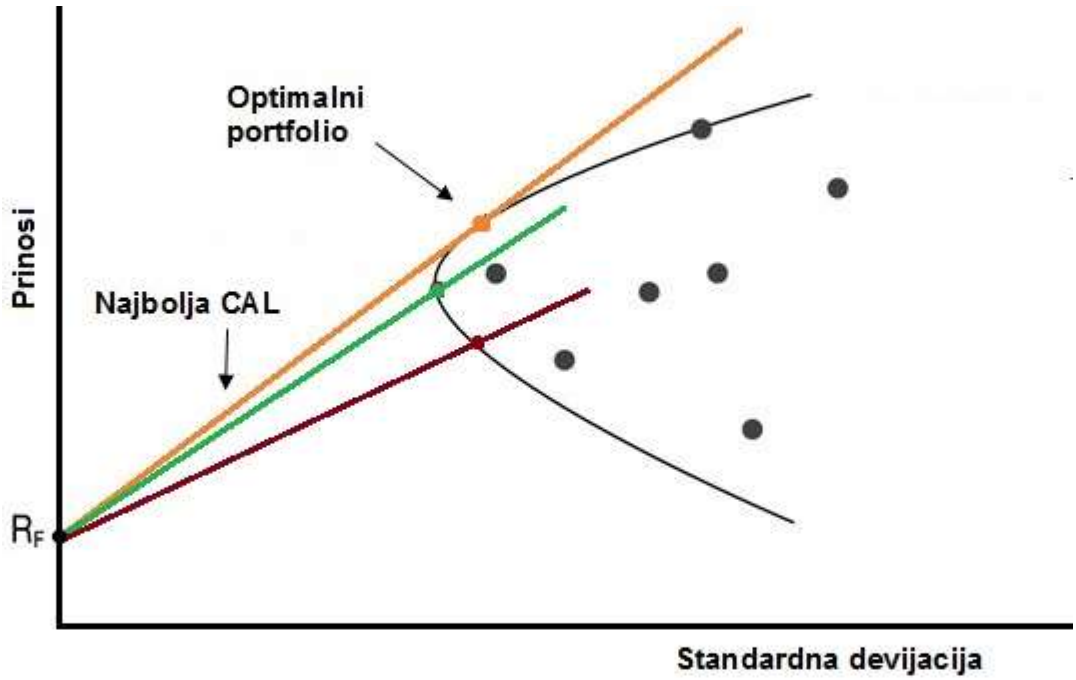


Komentar: Kriva granice efikasnih portfolija je uvek konkavna (udubljena) u odnosu na ordinatu (Y osu). U temenu granice efikasnih portfolija nalazi se MVP, koji ima najnižu standardnu devijaciju uz određenu stopu prinosa. Kriva granice efikasnih portfolija može da se podeli na dva dela – iznad i ispod tačke MVP. Sve tačke iznad MVP (npr. tačka A) predstavljaju set efikasnih portfolija, odnosno ti portfoliji obezbeđuju veći prinos od MVP, ali uz veći rizik. Tačke ispod MVP (npr. tačka B) čine skup neefikasnih portfolija, i treba ih ignorisati, zato što uz manji prinos imaju i veći rizik. Koju će konkretnu kombinaciju iznad tačke MVP izabrati investitor zavisi od njegovih preferencija, odnosno njegove averzije prema riziku, jer veći prinos povlači i veći rizik. Može se primetiti da povećanje udela zlata u portfoliju sa 73% na 80% povećava rizik, ali povećava i prinos portfolija (portfolijo A je onda efikasan), dok smanjenje udela zlata sa 73% na 60% povećava rizik portfolija, ali i smanjuje prinosa (portfolijo B je onda neefikasan). Tačka C predstavlja ulaganje koje čini 100% udela zlata i 0% udela S&P500, dok u tački D taj odnos čini 100% udela S&P500 i 0% zlata. Sa aspekta svih tačaka na slici, ulaganje 100% u S&P500 je najgora varijanta, prema ovom hipotetičkom primeru, jer podrazumeva najveći rizik uz najmanji prinos. Sa druge strane, ulaganje samo u zlato može doneti najveći prinos, ali i uz velik rizik u odnosu na MVP.

LINIJA ALOKACIJE KAPITALA

Linija alokacije kapitala (CAL, eng. *capital allocation line*) ima potpunu analogiju sa ranije objašnjavanom tržišnom linijom HoV (SML – *security market line*), a razlika je u tome što SML posmatra odnos prinosa i rizika za jednu HoV, a CAL posmatra isti taj odnos, samo sa aspekta portfolija. Linija alokacije kapitala prikazuje veličinu prinosa koju investitor može ostvariti uz određeni nivo rizika. Drugim rečima, svaki portfolijo na efikasnoj liniji portfolija ima svoju CAL sa različitim uglom u odnosu na X osu. CAL u suštini oslikava Šarpov racio, koji posmatra odnos prinosa i rizika, uzimajući u obzir da svaki investitor može ostvariti minimalni prinos, koji je u suštini bezrizični prinos ostvaren na državne obveznice. Drugim rečima, CAL pokazuje koliki je dodatni prinos portfolija na dodatni rizik, i to se još naziva stopa nagrade u prinosu prema varijabilitetu (riziku). Da se potsetimo, Šarpov racio se računa kao: $Sharpe\ ratio = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p}$. Slika 6.3 prikazuje najbolju liniju alokacije kapitala i optimalni portfolijo.

Slika 6.3. Najbolja linija alokacije kapitala i optimalni portfolijo



Izvor: delo autora.

Svaka linija CAL koja ima veći ugao u odnosu na X osu ima veći Šarpov racio, odnosno u tom slučaju investitor ostvaruje veći prinos uz odgovarajući rizik. Najveći ugao u odnosu na X osu, samim tim najveći Šarpov racio ima portfolio kroz koga prolazi CAL (žuta linija) koja je tangenta na liniju efikasnih portfolija. Portfolijo sa najvećim Šarpovim raciom se naziva **optimalni portfolijo** (žuta tačka). Zelena linija koja prolazi kroz tačku MVP (zelena tačka) ima manji Šarpov racio nego žuta tačka. Odnosno u zelenoj tački je manji odnos prinos/rizik nego u žutoj tački. Crvena tačka, koja prdstavlja neefikasni portfolijo, ima najmanji Šarpov racio, jer su prinosi takvog portfolja manji, a rizik mu je veći u odnosu na MVP (zelena tačka). Sve linije alokacije kapitala polaze od nivoa R_F na Y osi, a to je bezrizični prinos, odnosno bezrizična kamatna stopa. Zapravo, stopa nagrade u prinosu prema varijabilitetu (riziku) je ista kod svih portfolija koji se nalaze na istoj CAL, samo se razlikuju kombinacije prinosa i rizika. Kod različitih CAL linija, 1% povećanja prinosa podrazumeva n% povećanja rizika, i obrnuto. Investitori koji nisu skloni riziku izabraće ulaganje u tački R_F, a investitori koji su skloniji riziku, a hoće da ga minimiziraju, odabraće tačku MVP (zelena tačka). Investitori koji su još tolerantniji prema riziku odabraće neku tačku iznat tačke MVP na liniji granice efikasnih portfolija. Investitori koji biraju optimalni (najbolji) odnos prinosa i rizika, izabraće optimalni portfolijo sa najvećim Šarpovim raciom u žutoj tački, gde je CAL tangenta na liniju efikasnih portfolija.

ZADATAK 22 – Izračunavanje stope nagrade u prinosu prema varijabilnosti portfolija

Na bazi podataka za tri portfolija (MVP, A i B) iz zadatka 20, izračunajte stope nagrade u prinosu prema varijabilnosti portfolija, odnosno Šarpov racio (S), za sva tri portfolija, ako je bezrizična stopa 2% i protumačite dobijene rezultate.

Stope nagrade u prihodu prema varijabilnosti portfolija (Šarpov racio) su:

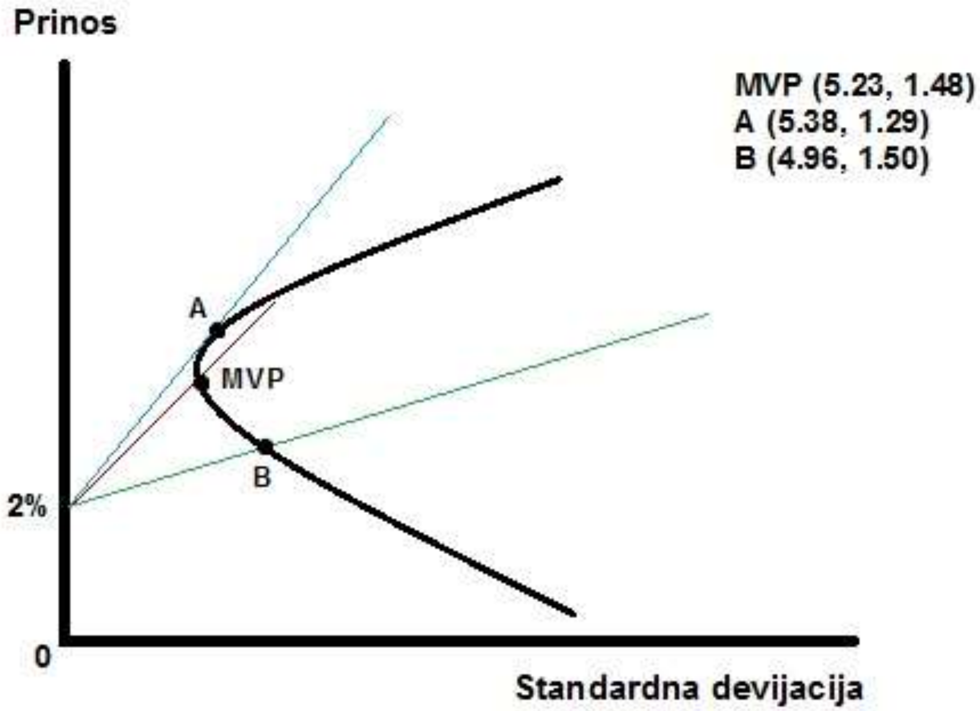
$$S_{MVP} = \frac{r_{MVP} - r_f}{\sigma_{MVP}} = \frac{5{,}233 - 2}{1{,}4818} = 2{,}18$$
$$S_A = \frac{r_A - r_f}{\sigma_A} = \frac{5{,}38 - 2}{1{,}2916} = 2{,}62$$
$$S_B = \frac{r_B - r_f}{\sigma_B} = \frac{4{,}96 - 2}{1{,}5094} = 1{,}96$$

Komentar: Može se primetiti da je stopa nagrade u prinosu prema varijabilnosti (Šarpov racio) veća u portfoliju A u odnosu na MVP. Istovremeno, to znači da se tačka A nalazi iznad tačke MVP na liniji efikasnih portfolija, što je potvrda prethodno rečenog. Portfolijo B spada u grupu neefikasnih portfolija i on ima niži S (Šarpov racio) u odnosu na MVP i portfolijo A. Svaki racionalni investitor bi odabrao portfolijo A, iako on ne nudi najmanji rizik, ali portfolijo A ima najveći odnos između prinosa i rizika, a ostvariti veći prinos je još važnije investitoru, nego ostvariti niži rizik. Razlika u Šarpovom raciu između portfolija A i MVP je: 2,62 – 2,18 = 0,44, što znači da se očekivani prinos portfolija A povećava za dodatna 44 bazična poena (skoro pola procenta) pri svakom povećanju standardne devijacije (rizika) za jedan procenat. Razlika u Šarpovom raciu između portfolia B i MVP je: 1.96 – 2.18 = -0.22, što znači da se očekivani prinos portfolia B smanjuje za 22 bazična poena od procenta za svako jednoprocentno povećanje rizika. Prema tome, portfolio B je neefikasan.

ZADATAK 23 – Ucrtavanje linije alokacije kapitala (CAL – *capital allocation line*)

Na bazi proračuna iz zadatka 22, ucrtajte na grafikonu linije alokacije kapitala za sva tri portfolija. Prokomentarišite grafikon.

Rešenje:



Komentar: Što neki portfolijo ima veći Šarpov racio, to je CAL strmija (veći ugao u odnusu na X osu). Možemo primetiti na grafikonu da najstrmiji CAL ima portfolijo A (plava linija), jer su njegovi prinosi po jedinici varijablinosti najveći. Drugim rečima, što je veći Šarpov racio, to su veći uglovi u odnosu na X osu. Prema tome, posmatrano sa aspekta Šarpovog racia, portfolijo A je bolji od MVP, a oba su bolja od neefikasnog portfolija B. Sve linije alokacije kapitala polaze od 2% na Y osi, jer je to nivo bezrizičnog prinosa.

RAČUNANJE OPTIMALNOG PORTFOLIJA:

Kao što postoji jednačina za računanje portfolija minimalne varijanse, tako postoji i jednačina koja računa udeo sekundarnog instrumenta za pravljenje optimalnog portfolija, tj. portfolija sa najvećim Šarpovim raciom. Jednačina koja računa udeo sekundarnog instrumenta u optimalnom portfoliju izgleda kao u zrazu (6.7).

$$W^S = \frac{[r_S - r_f]\sigma_P^2 - [r_P - r_f]COV_{P,S}}{[r_S - r_f]\sigma_P^2 + [r_P - r_f]\sigma_S^2 - [r_S - r_f + r_P - r_f]COV_{P,S}} \qquad (6.7)$$

Gde je r_S prinost sekundarnog instrumenta, r_P prinos primarnog instrumenta, r_f prinos bezrizičnog instrumenta. Simbol σ_P^2 označava varijansu primarnog instrumenta, simbol σ_S^2 označava varijansu sekundarnog instrumenta, a simbol $COV_{P,S}$ označava kovarijansu dva instrumenta. Udeo primarnog instrumenta (W^P) u optimalnom portfoliu je onda 1 - W^S.

<u>ZADATAK 23</u> – pravljenje optimalnog portfolija

Na bazi sledećih podataka izračunajte udeo sekundarnog instrumenta u optimalnom portfoliju: $r_A = 10, r_B = 13{,}4, \sigma_A^2 = 60, \sigma_B^2 = 320{,}64, COV_{A,B} = 24$ i $\rho_{A,B} = 0{,}1729$, $r_f = 2\%$. Takođe, izračunajte varijansu optimalnog portfolija, prinos optimalnog portfolija i Šarpov racio. Radi poređenja, izračunajte udeo sekundarnog instrumenta za MVP, varijansu za MVP, prinos za MVP i Šarpov racio za MVP i dajte komentar.

Rešenje:

Pošto je instrument B rizičniji, onda je on primarni instrument u portfoliju, a instrument A je onda sekundaran.

Udeo sekundarnog instrumenta A u MVP portfoliju prema jednačini za udeo u MVP je:

$$W_{MVP}^{A} = \frac{\sigma_B^2 - COV_{A,B}}{\sigma_B^2 + \sigma_A^2 - 2COV_{A,B}} = \frac{320{,}64 - 24}{320{,}4 + 60 - 2 \times 24} = \frac{296{,}64}{332{,}4} = 0{,}8924 \approx 89\%$$

Onda je udeo primarnog instrumenta B 11%, odnosno 100% - 89% = 11%.

Standardne devijacije instrumenata A i B su:

$\sigma_A = \sqrt{\sigma_A^2} = \sqrt{60}$ =7,745

$\sigma_B = \sqrt{\sigma_B^2} = \sqrt{320{,}64}$ =17,906

Prinos, varijansa, standardna devijacija i Šarpov racio portfolija sa minimalnom varijansom su:

$$r_{MVP} = W_P r_P + W_S r_S = 0{,}11 \times 13{,}4 + 0{,}89 \times 10 = 10{,}374$$

$$\sigma_{MVP}^2 = (0{,}11 \times 17{,}906)^2 + (0{,}89 \times 7{,}745)^2 + 2(0{,}11 \times 17{,}906)(0{,}89 \times 7{,}745)$$
$$\times 0{,}1729 = 56{,}101$$

$\sigma_{MVP} = \sqrt{\sigma_{MVP}^2} = \sqrt{56{,}101}$ =7,49

$S_{MVP} = \frac{r_{MVP} - r_f}{\sigma_{MVP}} = \frac{10{,}374 - 2}{7{,}49}$ =1,118

Udeo sekundarnog instrumenta A u optimalnom portfoliju je:

$$W_O^A = \frac{[r_A - r_f]\sigma_B^2 - [r_B - r_f]COV_{A,B}}{[r_A - r_f]\sigma_B^2 + [r_B - r_f]\sigma_A^2 - [r_B - r_f + r_A - r_f]COV_{A,B}} =$$

$$= \frac{(10 - 2) \times 320{,}64 - (13{,}4 - 2) \times 24}{(10 - 2) \times 320{,}64 + (13{,}4 - 2) \times 60 - (13{,}4 - 2 + 10 - 2) \times 24}$$

$$= \frac{2291,52}{2565,12 + 684 - 465,6} = \frac{2291,52}{2783,4} = 0,8233 \approx 82\%$$

Udeo instrumenta B u optimalnom portfoliju je onda: 1 – 0.82 = 0.18 = 18%:

Prinos, varijansa, standardna devijacija i Šarpov racio u optimalnom portfoliju su:

$$r_O = W_P r_P + W_S r_S = 0,82 \times 10 + 0,18 \times 13,4 = 10,612$$

$$\sigma_O^2 = (0,18 \times 17,906)^2 + (0,82 \times 7,745)^2 + 2(0,18 \times 17,906)(0,82 \times 7,745)$$
$$\times\, 0,1729 = 57,801$$

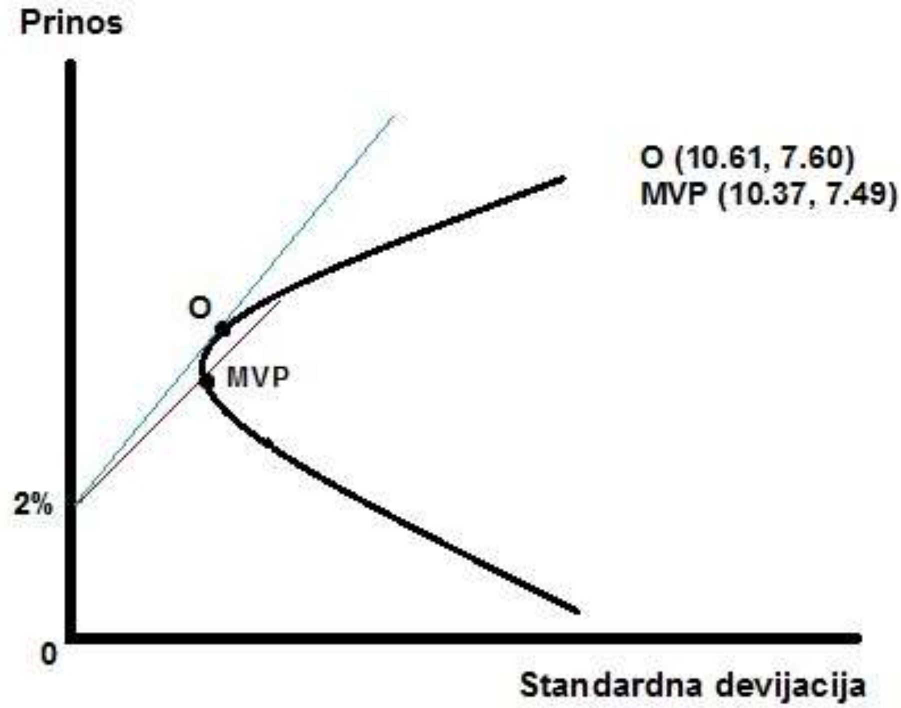
$$\sigma_O = \sqrt{\sigma_O^2} = \sqrt{57,801} = 7,602$$

$$S_O = \frac{r_{MVP} - r_f}{\sigma_{MVP}} = \frac{10,612 - 2}{7,49} = 1,150$$

Komentar: Rezultati pokazuju da je razlika u Šarpovom raciju između optimalnog portfolija i MVP 1.15 – 1.18 = 0.032, što znači da se očekivani prinos optimalnog portfolija povećava za dodatna 32 bazična poena (oko trećine procenta) pri svakom povećanju standardne devijacije za jedan procenat. Razlika između dva portfolija je u tome što je u MVP udeo instrumenta B 11%, a instrumenta A 89%, dok je u optimalom portfoliu udeo instrumenta B 18%, a instrumenta A 82%.

<u>ZADATAK 24</u> – ucrtavanje optimalnog portfolija na grafikonu

Na bazi podataka iz zadatka 23, ucrtati na grafikonu MVP i optimalni portfolijo (O), kao i linije alokacije kapitala (CAL). Protumačiti grafikon.



Komentar: Kao što se može videti na grafikonu, optimalni portfolijo se nalazi severoistočno u odnosu na portfolijo minimalne varijanse na granici efikasnih portfolija, što znači da optimalni portfolijo nosi veći prinos, ali i veći rizik. Takođe, linija alokacije kapitala (CAL) je strmija za optimalni portfolijo nego za MVP, što znači da optimalni portfolijo donosi veći prinos po svakoj jedinici standardne devijacije u odnosu na MVP, a konkretno to iznosi 32 bazična poena.