

***АКТУАРСТВО***

*- Формуле -*

*др Наташа Папић-Благојевић*

## 1. Теорија вероватноће

**Класична дефиниција вероватноће**

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

**Емпиријска вероватноћа**

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f_i}{N}$$

**Условна вероватноћа**

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

**Правило или закон множења вероватноћа**

$$P(AB) = P(BA) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

**Збирна вероватноћа**

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

**Статистичка независност догађаја**

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(A|B) = P(A) \text{ ако је } P(B) > 0$$

$$P(B|A) = P(B) \text{ ако је } P(A) > 0$$

**Бајесова формула**

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

## 2. Осигурање живота

### *Вероватноћа живота и смрти једног лица*

$$l_x > l_{x+1} > l_{x+2} > \dots > l_{x+n}$$

$$d_x = l_x - l_{x+1} \Rightarrow l_{x+1} = l_x - d_x$$

- вероватноћа да ће лице старо  $x$  година доживети  $(x+k)$  година

$${}_k p_x = \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

- вероватноћа да ће лице старо  $x$  година доживети  $(x+n)$  година

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

- вероватноћа да лице старо  $x$  година неће доживети  $x+1$  годину

$$q_x = 1 - p_x$$

$$p_x + q_x = 1$$

- вероватноћа да лице старо  $x$  година неће доживети  $x+n$  година

$${}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x$$

$${}_n p_x + {}_n q_x = 1$$

- број чланова групе лица старости  $x$  година који ће вероватно живети после  $k$  година

$$G = \sum G \cdot {}_k p_x = \sum G \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

### *Вероватно трајање живота*

$$\frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{1}{2} \Rightarrow l_{x+k} = \frac{l_x}{2}$$

### *Средње трајање живота*

- прва варијанта (почетком године)

$$e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} \dots}{l_x}$$

- друга варијанта (крајем године)

$$e'_x = \frac{l_x + l_{x+1} + l_{x+2} \dots}{l_x} = 1 + e_x$$

- аритметичка средина прве и друге варијанте

$$e_x^0 = \frac{e_x + e'_x}{2} = \frac{e_x + 1 + e_x}{2} = \frac{1}{2} + e_x$$

### ***Вероватноћа живота и смрти два лица***

- вероватноћа да ће оба лица живети још  $n$  година

$${}_n P_{xy} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} = {}_n P_x \cdot {}_n P_y$$

$${}_n P_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$${}_n P_y = \frac{l_{y+n}}{l_y}$$

- вероватноћа да оба лица неће бити у животу после  $n$  година

$${}_n q_{xy} = 1 - {}_n P_{xy} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} = 1 - {}_n P_x \cdot {}_n P_y$$

- вероватноћа да ће после  $n$  година бити живо само лице  $A$

$${}_n P_{x'y} = {}_n P_x \cdot (1 - {}_n P_y)$$

$${}_n P_{x'y} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \left(1 - \frac{l_{y+n}}{l_y}\right)$$

- вероватноћа да ће после  $n$  година бити живо само лице  $B$

$${}_n P_{xy'} = {}_n P_y \cdot (1 - {}_n P_x)$$

$${}_n P_{xy'} = \frac{l_{y+n}}{l_y} \cdot \left(1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}\right)$$

## Осигурање личне ренте уплатом мизе

### 1. Непосредна доживотна рента

а) Антиципативна рента

$$a_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$M = R \cdot a_x$$

б) Декурзивна рента

$$a'_x = \frac{N_x - D_x}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} - 1 = a_x - 1 = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$M = R \cdot a'_x$$

### 2. Одложена доживотна рента

а) Антиципативна рента

$${}_k|a_x = \frac{N_{x+k}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_k|a_x$$

б) Декурзивна рента

$${}_k|a'_x = \frac{N_{x+k+1}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_k|a'_x$$

### 3. Непосредна привремена рента

а) Антиципативна рента

$${}_n a_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_n a_x$$

б) Декурзивна рента

$${}_n a'_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_n a'_x$$

#### 4. Одложена привремена рента

а) Антиципативна рента

$${}_{k|n}a_x = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_{k|n}a_x$$

б) Декурзивна рента

$${}_{k|n}a'_x = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x}$$

$$M = R \cdot {}_{k|n}a'_x$$

#### Осигурање личне ренте уплатом премије

##### 1. Премија се плаћа доживотно

а) Рента се прима непосредно и доживотно

- Антиципативна рента

$$P(a_x) = 1 \Rightarrow P = R \cdot P(a_x) = R$$

- Декурзивна рента

$$P(a'_x) = 1 - \frac{D_x}{N_x} = 1 - \frac{1}{a_x}$$

$$P = R \cdot P(a'_x)$$

б) Рента се прима одложено и доживотно (антиципативно)

$$P({}_k|a_x) = \frac{N_{x+k}}{N_x}$$

$$P = R \cdot P({}_k|a_x)$$

##### 2. Премија се плаћа привремено (највише $m$ пута) и антиципативно

а) Рента се прима непосредно и доживотно

$${}_mP(a_x) = \frac{N_x}{N_x - N_{x+m}}$$

$$P = R \cdot {}_mP(a_x)$$

б) Рента се прима после  $k$  година и доживотно

$${}_m P({}_k|a_x) = \frac{N_{x+k}}{N_x - N_{x+m}}$$

$$P = R \cdot {}_m P({}_k|a_x)$$

в) Рента се прима првих  $n$  година

$${}_m P({}_n|a_x) = \frac{N_x - N_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

$$P = R \cdot {}_m P({}_n|a_x)$$

г) Рента се прима после  $k$  година, али највише  $n$  пута

$${}_m P({}_k|_n a_x) = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

$$P = R \cdot {}_m P({}_k|_n a_x)$$

### Осигурање капитала уплатом мизе

#### 1. Осигурање капитала за случај смрти

а) Доживотно осигурање капитала за случај смрти

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

$$M = K \cdot A_x$$

б) Одложено осигурање капитала за случај смрти

$${}_k|A_x = \frac{M_{x+k}}{D_x}$$

$$M = K \cdot {}_k|A_x$$

в) Привремено осигурање за случај смрти

$$|_n A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$M = K \cdot |_{n} A_x$$

г) Одложено и привремено осигурање за случај смрти

$${}_{k|n} A_x = \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x}$$

$$M = K \cdot {}_{k|n} A_x$$

**2. Осигурање капитала за случај доживљења**

$$|_n E_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$M = K \cdot |_{n} E_x$$

**3. Мешовито осигурање**

$$A_{x,n} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x,n} = |_{n} A + |_{n} E_x$$

$$M = K \cdot A_{x,n}$$

### Осигурање капитала уплатом годишње премије

**1. Премија се плаћа доживотно**

а) Непосредно осигурање капитала (без услова и ограничења)

$$P(A_x) = \frac{M_x}{N_x} = \frac{A_x}{a_x}$$

$$P = K \cdot P(A_x)$$



б) *Одложено осигурање капитала*

$$P({}_k|A_x) = \frac{M_{x+k}}{N_x} = \frac{{}_k|A_x}{a_x}$$

$$P = K \cdot P({}_k|A_x)$$

## 2. Премија се плаћа привремено

а) *Доживотно осигурање капитала за случај смрти*

$${}_m P(A_x) = \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} = \frac{A_x}{|_m a_x}$$

$$P = K \cdot {}_m P(A_x)$$

б) *Привремено осигурање капитала за случај смрти (на  $n$  година)*

$${}_m P({}_n A_x) = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} = \frac{|_n A_x}{|_m a_x}$$

$$P = K \cdot {}_m P({}_n A_x)$$

в) *Привремено осигурање капитала за случај доживљења*

$${}_m P({}_n E_x) = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} = \frac{|_n E_x}{|_m a_x}$$

$$P = K \cdot {}_m P({}_n E_x)$$

г) *Мешовито осигурање капитала*

$${}_m P(A_{x,n}) = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} = {}_m P({}_n A_x) + {}_m P({}_n E_x)$$

$$P = K \cdot {}_m P(A_{x,n})$$

## Осигурање капитала уплатом месечне премије

### 1. Премија се плаћа доживотно

а) Непосредно осигурање капитала (без услова и ограничења)

$$P^m(A_x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{M_x}{N_x} \cdot r$$

$$P^m = K \cdot P^m(A_x)$$

б) Одложено осигурање капитала

$$P^m({}_k|A_x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{M_{x+k}}{N_x} \cdot r$$

$$P^m = K \cdot P^m({}_k|A_x)$$

### 2. Премија се плаћа привремено

а) Доживотно осигурање капитала за случај смрти

$${}_mP^m(A_x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} \cdot r$$

$$P^m = K \cdot {}_mP^m(A_x)$$

б) Привремено осигурање капитала за случај смрти (на  $n$  година)

$${}_mP^m({}_n|A_x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \cdot r$$

$$P^m = K \cdot {}_mP^m({}_n|A_x)$$

в) Привремено осигурање капитала за случај доживљења

$${}_mP^m({}_nE_x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \cdot r$$

$$P^m = K \cdot {}_mP^m({}_nE_x)$$

г) Мешовито осигурање капитала

$${}_m P^m(A_{x,n}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \cdot r$$

$$P^m = K \cdot {}_m P^m(A_{x,n})$$

### 3. Математичке резерве

#### Нето методе

##### 1. Књиговодствена метода

$${}_{t+1} V_x = \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} ({}_t V_x + P_x) - \frac{C_{x+t}}{D_{x+t+1}}$$

##### 2. Ретроспективна метода

$${}_t V_x = \frac{P_x \cdot (N_x - N_{x+t}) - (M_x - M_{x+t})}{D_{x+t}}$$

##### 3. Проспективна метода

$${}_t V_x = \frac{M_{x+t} - P_x \cdot N_{x+t}}{D_{x+t}}$$

##### 4. Ретроспективна метода за мешовито осигурање

$${}_t V_x = (P_{x,n] \cdot a_{x,t]} - A_{x,t]) \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}}$$

$$P_{x,n]} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

$$a_{x,t]} = \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}$$

$$A_{x,t]} = \frac{M_x - M_{x+t}}{D_x}$$

### 5. Проспективна метода за мешовито осигурање

$${}_tV_x = A_{x+t,n-t]} - P_{x,n]} \cdot a_{x+t,n-t]}$$

$$A_{x+t,n-t]} = \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}}$$

$$P_{x,n]} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

$$a_{x+t,n-t]} = \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}$$

#### Бруто методе

Годишња премија за мешовито осигурање:

$$P_{x,n]} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Вредност свих премија које ће доспети у току  $n$  година:

$$a_{x,n]} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Садашња вредност свих отплата:

$$\alpha \cdot a_{x,n]}$$