



## ПРИПРЕМА ЗА ТЕСТ 1

1. На основу података о распореду студената према броју положених испита:

Број положених испита	Број студената
1	4
2	4
3	3
4	6
5	9
6	3
7	1
укупно	30

- а) израчунати просечан број положених испита;
- б) одредити медијану;
- в) одредити модус;
- г) испитати симетричност распореда преко односа аритметичке средине, модуса и медијане (прокоментарисати);
- д) испитати варијабилитет посматраног распореда користећи коефицијент варијације;
- ђ) Један студент је положио 8 испита, колико одступа од просека? Одступање израчунати преко релативне мере варијације.

**Решење:**

а) За израчунавање просечног броја положених испита користи се формула за аритметичку средину за груписане податке. У радној табели се израчунавају неопходне суме.

Број положених испита $x_i$	Број студената $f_i$	$x_i \cdot f_i$
1	4	4
2	4	8
3	3	9
4	6	24
5	9	45
6	3	18
7	1	7
укупно	30	115

Пошто је  $\sum f_i \cdot x_i = 115$  и  $\sum f_i = n = 30$ , следи да је аритметичка средина:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{115}{30} = 3,83 \approx 4$$

Одговор: Студенти су у просеку положили 4 испита.

б) Код израчунавања медијане за прекидне расподеле уколико је број података непаран користи се следећи образац:

$$M_e = x_{\frac{n+1}{2}}$$

За серије са парним бројем података медијана се израчунава на следећи начин:

$$M_e = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$$

Пошто је  $\sum f_i = n = 30$  паран број, следи да је медијана:

$$M_e = \frac{x_n + x_{n+1}}{2} = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = \frac{4 + 4}{2} = 4$$

Вредности 15. и 16. члана посматране серије читавамо из колоне кумулативи „испод“ ( $K_{fis}$ ):

Број положених испита $x_i$	Број студената $f_i$	$K_{fis}$
1	4	4
2	4	8
3	3	11
4	6	17
5	9	26
6	3	29
7	1	30
укупно	30	-

Одговор: Закључујемо да је половина студената положила више од четири испита, а половина мање.

**в)** Модус је вредност обележја која се најчешће јавља у серији, тј. вредност класе са највећом фреквенцијом.

Из табеле се лако уочава да је максимална фреквенција  $f_{max} = 9$ . Овој фреквенцији одговара вредност обележја 5, па је  $M_o = 5$ .

Број положених испита	Број студената
1	4
2	4
3	3
4	6
5	9
6	3
7	1
укупно	30

**г)** Код испитивања симетричности расподеле преко односа аритметичке средине, модуса и медијане разликујемо три случаја.

Уколико је дистрибуција фреквенције:

- *симетрична*, онда аритметичка средина, модус и медијана имају исту вредност, тј.  $\bar{x} = M_e = M_o$
- *негативно асиметрична (асиметрична у лево)*, онда је аритметичка средина мања од медијане, а медијана мања од модуса, тј.  $\bar{x} < M_e < M_o$
- *позитивно асиметрична (асиметрична у десно)*, онда је аритметичка средина већа од медијане, а медијана већа од модуса, тј.  $M_o < M_e < \bar{x}$ .

Одговор: У нашем примеру  $\bar{x} = 3,83$ ,  $M_e = 4$  и  $M_o = 5$ , односно  $\bar{x} < M_e < M_o$ , па закључујемо да је дати распоред негативно асиметричан.

д) Да бисмо израчунали коефицијент варијације из формуле:

$$C_v = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

прво треба да израчунамо стандардну девијацију преко:

$$s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{\sum f_i} - \bar{x}^2}$$

У радној табели додајемо још једну колону:

Број положених испита $x_i$	Број студената $f_i$	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
1	4	4	4
2	4	8	16
3	3	9	27
4	6	24	96
5	9	45	225
6	3	18	108
7	1	7	49
укупно	30	115	525

Замењујемо вредности у формули:

$$s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{525}{30} - 3,83^2} = \sqrt{17,5 - 14,67} = \sqrt{2,83} = 1,68$$

Затим израчунавамо коефицијент варијације:

$$C_v = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{1,68}{3,83} \cdot 100\% = 43,86\%$$

*Одговор:* Варирање броја положених испита међу студентима износи 43,86%.

h) Један студент је положио 8 испита, колико одступа од просека? Одступање израчунати преко релативне мере варијације.

За поређење одступања појединих вредности обележја од аритметичке средине користи се *нормализовано* или *стандардизовано одступање* које се израчунава по формули:

$$z = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

Све вредности су нам познате, па их само замењујемо у формули и изводимо закључак:

$$z = \frac{x_i - \bar{x}}{s} = \frac{8 - 3,83}{1,68} = 2,48$$

*Одговор:* Посматрани студент одступа према броју положених испита 2,48 стандардних девијација **изнад** просека.

2. На основу распореда радника према прекорачењу норме (изражено у часовима рада):

Извршење норме	Број радника
87-92	4
92-97	5
97-102	15
102-107	10
107-112	5
укупно	39

- а) израчунати просечно прекорачење норме које су радници остварили;
- б) одредити медијану;
- в) одредити модус;
- г) испитати симетричност распореда преко односа аритметичке средине, модуса и медијане (прокоментарисати);
- д) испитати варијабилитет посматраног распореда користећи коефицијент варијације;
- ђ) Један радник је прекорачио норму за 96 сати, колико одступа од просека? Одступање израчунати преко релативне мере варијације.

**Решење:**

а) За израчунавање просечног прекорачења норме користи се формула за аритметичку средину за груписане податке. У радној табели прво одређујемо групне средине, а затим израчунавамо неопходне суме.

Извршење норме $x_i$	Број радника $f_i$	$x_i$	$x_i \cdot f_i$
87-92	4	89,5	358
92-97	5	94,5	472,5
97-102	15	99,5	1.492,5
102-107	10	104,5	1.045
107-112	5	109,5	547,5
укупно	39	-	3.915,5

Замењујемо вредности у формули:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{3.915,5}{39} = 100,4$$

Одговор: Просечно прекорачење норме износи 100,4 часа.

б) За израчунавање медијане користимо образац за медијану за непрекидна обележја:

$$M_e = L_m + \frac{\sum f_i - K_{m-1}}{f_m} \cdot \Delta$$

Да би се одредио медијални интервал израчунате су кумулативне фреквенције и приказане су у табели:

Извршење норме $x_i$	Број радника $f_i$	$K_{f_i}$
87-92	4	4
92-97	5	9
97-102	15	24
102-107	10	34
107-112	5	39
укупно	39	-

Пошто је  $\frac{\sum f_i}{2} = \frac{39}{2} = 19,5$  следи да је медијални интервал 97-102 јер садржи 19,5-ти члан серије. Замењујемо вредности у обрасцу:

$$M_e = L_m + \frac{\sum f_i - K_{m-1}}{f_m} \cdot \Delta = 97 + \frac{\frac{39}{2} - 9}{15} \cdot 5 = 97 + 3,5 = 100,5$$

*Одговор:* Половина радника је имала прекорачење норме мање од 100,5 часова, а половина више.

**в)** Уколико је серија интервална, модус се рачуна према формули:

$$M_o = L_m + \frac{f_m - f_{m-1}}{(f_m - f_{m-1}) + (f_m - f_{m+1})} \cdot \Delta$$

Пошто се модус налази негде у интервалу који има највећу фреквенцију, закључујемо да је модални интервал 97-102:

Извршење норме $x_i$	Број радника $f_i$	$K_{fis}$
87-92	4	4
92-97	5	9
97-102	15	24
102-107	10	34
107-112	5	39
укупно	39	-

Замењујемо вредности у формули:

$$M_o = L_m + \frac{f_m - f_{m-1}}{(f_m - f_{m-1}) + (f_m - f_{m+1})} \cdot \Delta =$$

$$= 97 + \frac{15 - 5}{(15 - 5) + (15 - 10)} \cdot 5 = 97 + 3,33 = 100,33$$

*Одговор:* Најчешће прекорачење норме је износило 100,33 часа.

**г)** Пошто је у нашем примеру  $\bar{x} = 100,4$ ,  $M_e = 100,5$  и  $M_o = 100,33$ , видимо да је модус најмањи, што указује да би распоред могао бити *позитивно асиметричан*.



Међутим, однос преостале две величине не одговара релацији  $M_o < M_e < \bar{x}$  да би се са сигурношћу извео овакав закључак, па је боље симетричност испитати преко коефицијента асиметрије.

д) Да бисмо израчунали коефицијент варијације из формуле:

$$C_v = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

прво треба да израчунамо стандардну девијацију преко:

$$s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{\sum f_i} - \bar{x}^2}$$

У радној табели додајемо још једну колону:

Извршење норме $x_i$	Број радника $f_i$	$x_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
87-92	4	89,5	32.041,00
92-97	5	94,5	44.651,25
97-102	15	99,5	148.503,75
102-107	10	104,5	109.202,50
107-112	5	109,5	59.951,25
укупно	39	-	394.349,75

Замењујемо вредности у формули:

$$s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{394.349,75}{39} - 100,4^2} = \sqrt{10.111,53 - 10.080,16} = \sqrt{31,37} = 5,6$$

Затим израчунавамо коефицијент варијације:

$$C_v = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{5,6}{100,4} \cdot 100\% = 5,58\%$$

Одговор: Варирање у висини прекорачених норма часова међу радницима износи 5,58%.

ђ) Један радник је прекорачио норму за 96 сати. За поређење одступања појединих вредности обележја од аритметичке средине користи се *нормализовано* или *стандардизовано одступање* које се израчунава по формули:

$$z = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

Све вредности су нам познате, па их само замењујемо у формули и изводимо закључак:

$$z = \frac{x_i - \bar{x}}{s} = \frac{96 - 100,4}{5,6} = -0,79$$

*Одговор:* Посматрани радник одступа према прекорачењу норме 0,79 стандардних девијација **испод** просека.

*Др Наташа Папић-Благојевић, проф.*